

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Факультет проблем физики и энергетики

Кафедра «Плазменная энергетика»

Допущен к защите

_____ 13.06.2006

Зам. зав. кафедрой

В. М. Сафронов

Магистерская диссертация

(выпускная квалификационная работа для присвоения степени магистра)

**РАЗВИТИЕ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ МЕТОДОВ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ
КВАНТОВОЙ И КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Студент-выпускник

ФПФЭ, 6 курс, гр. 081А

_____ О. В. Пилявец

Руководитель

профессор, д. ф.-м. н.

_____ А. П. Напартович

Консультант

профессор, д. ф.-м. н.

_____ В. И. Манько

Оглавление

Введение

1	Основные положения томографических методов в механике	9
1.1	Изоморфизм различных представлений состояний механических систем . . .	9
1.2	Формализм звёздочного произведения	12
1.3	Символы Вейля и матрицы операторов в квантовой механике	18
1.4	Символы Вейля и матрицы операторов в классической механике	20
1.5	Метод симплектической томографии в механике	21
1.6	Томография спиновых состояний	25
1.7	Запутанность квантовых состояний	28
2	Звёздочное произведение в классической и квантовой механиках	32
2.1	Взаимосвязь между классическими и квантовыми символами	32
2.2	Простейшие томографические символы	36
2.3	Ядро звёздочного произведения томографических символов физических ве- личин	38
2.4	Математические дополнения	40
3	Запутанные гауссовские состояния двумерного квантового осциллятора с переменной частотой	41
3.1	Гамильтониан Калдиरोла-Канаи и гауссовские состояния	42
3.2	Пропагатор в томографическом представлении	42
3.3	Эволюция изначально сепарабельного состояния	45
3.4	Эволюция изначально запутанного гауссовского состояния	47
3.5	Гамильтониан Калдирола-Канаи с дополнительным перекрёстным членом	52

4	Томографические характеристики некоторых спиновых систем	55
4.1	Томографические характеристики частиц без внутренней структуры	56
4.2	Томографические характеристики частиц со спином j в $ jm\rangle$ -состояниях .	59
4.3	Вернеровское состояние частицы со спином $j = 3/2$	61
4.4	Обобщённое вернеровское состояние частицы со спином $j = \frac{3}{2}$	68
4.5	Состояние Вернера системы двух спинов	72

Заключение

Благодарности

Литература

Введение

Стремление познать природу вещей привело человечество к более глубокому пониманию устройства макро- и микромира, а также их взаимосвязи к настоящему времени. В первую очередь, это привело к переосмыслению ранее известных знаний о квантовой и классической механиках, предоставляя возможность понять предельный переход от квантового поведения систем к классическому на качественно другом языке. Ряд проблем, изначально возникших при описании квантовых систем и поэтому связываемых исключительно с квантовой природой рассматриваемых объектов, оказались свойственны и самой обычной классической механике. Успех теоретических методов описания квантовых систем привёл к улучшению и экспериментальных методов измерения состояний частиц, подчиняющихся квантовым закономерностям. Как оказалось, построенный математический аппарат для описания квантовых объектов оказался более простым и интуитивно ясным с фундаментальной точки зрения, чем обычно применяющийся. Наряду с этим, некоторые важные проблемы квантовой механики, представляющие в данный момент большой интерес, удалось переформулировать на более простом для поиска математического решения языке.

На протяжении всего развития квантовой механики вследствие трудности её интуитивного восприятия неоднократно предпринимались попытки построить близкую к классической формулировку квантовой механики, не используя понятия комплексной волновой функции или матрицы плотности. Параллели между квантовой и классической картинами мира проводил ещё Дирак, который рассматривал так называемые s -числа и q -числа, первые из которых описывают классическую механику и являются обычными коммутирующими числами, а вторые не коммутируют и описывают квантовую механику, являясь с точки зрения математики некоммутирующими линейными операторами [1]. Позже аналогичные попытки предпринял Фейнман, введя в физику понятие интегралов по траекториям [2] и Вигнер [3], который рассмотрел вещественную функ-

цию на фазовой плоскости $W(q, p)$, содержащую в себе всю информацию о квантовой системе и являющуюся настолько максимально близким аналогом классической функции распределения $f(q, p)$ на фазовой плоскости, насколько это позволяет соотношение неопределённостей Гайзенберга. Интегрирование по переменной p функции Вигнера даёт функцию распределения (маргинальное распределение) по q , а интегрирование по переменной q даёт функцию распределения по p , при этом сама функция Вигнера $W(q, p)$ может принимать отрицательные значения. Для описания квантовых систем также рассматривались и другие, похожие на функцию Вигнера функции, наподобие Q -функции Хусими-Кано [4], P -функции Глаубера-Сударшана [5, 6] и других. Возможно, наличие соотношения неопределённостей являлось тем фактором, из-за которого построение формулировки квантовой механики в терминах обычных функций распределения вероятностей считалось невозможным в течении 70 лет.

В 1987г. Бертранами с целью улучшения измерения квантовых состояний была введена *оптическая томограмма* $\omega(X, \theta)$, имеющая смысл функции распределения координаты X квантовой частицы в зависимости от ансамбля квантовых систем, повернутых на угол θ в фазовом пространстве (q, p) (в случае одномерной модели) [7]. По своему физическому смыслу оптическая томограмма, содержащая в себе всю информацию о квантовом состоянии системы, является обратным преобразованием Радона от функции Вигнера. Таким образом, взаимосвязь между функцией Вигнера и оптической томограммой точно такая же, как и между функцией распределения массы на куске плоскости и весом всех прямых, пересекающих рассматриваемую плоскость в задаче Радона [8]. В силу математических трудностей временная эволюция оптической томограммы - аналога уравнения Шредингера - не получена до сих пор, хотя соотношения для перехода между оптической томограммой и функцией Вигнера известны [9]. Непосредственная связь оптической томограммы с волновой функцией впервые была получена в работе [10].

В 1996-1997гг. итало-российской группой учёных [11], [12] были опубликованы первые работы, в которых было рассмотрено обобщение понятия оптической томограммы - так называемая *симплектическая томограмма* которая, как и оптическая томограмма, является обычной положительной функцией распределения вероятности и содержит в себе всю информацию о квантовом состоянии системы. Отличительная черта симплектической томограммы заключается в том, что в функции распределения вероятности для координаты требуется знание зависимости не только от поворота фазовой плоскости системы, но и от изменения взаимного масштаба осей q и p . Эта особенность симплекти-

ческой томограммы позволила обойти некоторые математические трудности, возникшие при поиске уравнения временной эволюции для оптической томограммы, в результате чего уравнение эволюции для симплектической томограммы было найдено [11, 12]. Позже, в работе [13] было найдено обратимое преобразование между спиновой матрицей плотности и так называемой *спиновой томограммой* - положительной функцией распределения вероятности проекций спина на сфере (на n сферах для случая системы из n частиц со спином), которая содержит в себе такую же информацию о спиновом состоянии квантовой системы, как и спиновая матрица плотности. Таким образом, в «томографической» формулировке квантовой механики, которая является замкнутым полноценным языком описания квантовых систем, аналогом волновой функции (или матрицы плотности, зависящей от непрерывных переменных) является симплектическая томограмма, а аналогом спиновой матрицы плотности является спиновая томограмма. Ввиду того, что и симплектическая, и спиновая томограммы являются обычными функциями распределения вероятностей применение томографических методов к описанию квантовых систем позволяет переформулировать любую задачу квантовой механики на чисто вероятностном языке и использовать для нахождения её решения тот математический аппарат теории вероятности, который развивался в течении последних 300 лет.

В одной из недавних работ [14] было показано, что симплектическая, спиновая и другие виды томограмм также могут быть представлены как квадраты коэффициентов разложения вектора состояния при проектировании его на некий набор состояний, называемых *томографическим сетом*. В частности, для случая симплектической томограммы каждое состояние из томографического сета характеризуется 2-мя параметрами: поворотом фазового пространства и числом, характеризующим перемасштабирование осей q и p .

Применение томографических методов к квантовой механике позволило ввести такие вероятностные характеристики состояний, как *томографическая энтропия* и *томографическая информация*, в то время как обычная энтропия Шеннона для спиновой матрицы плотности (энтропия фон Ноймана) для чистых состояний всегда равна нулю.

В настоящее время большой интерес представляют собой создание квантовых компьютеров и возможность квантовой телепортации, которые основаны на явлении запутанности квантовых состояний [15]. Томографическая формулировка квантовой механики позволила переформулировать до сих пор в общем случае не решённую задачу о запутанности квантовых спиновых состояний на языке теории вероятности [16]. Частичное

исследование связи запутанности квантовых спиновых состояний с томографической энтропией и томографической информацией состояний было проведено в работе [17]. Для случая волновой функции и непрерывных наблюдаемых исследование эволюции запутанности с помощью томографического подхода было рассмотрено на примере квантового осциллятора с переменной частотой [18], представляющем интерес для изучения нестационарного эффекта Казимира [19-23]. Томографическая формулировка квантовой механики является наиболее простой и естественной для исследования неравенств Белла [24], которые позже были сформулированы как общее свойство распределения вероятностей любой системы из 4-х подсистем, каждая из которых способна находиться с какой-то вероятностью в одном из 2-х состояний [22].

Как было показано позднее, рассматривая поворот фазового пространства и изменение масштаба осей q и p можно построить симплектическую томограмму и классической системы [25], [26], аналогично случаю квантовой системы, при этом уравнения эволюции для квантовой и классической томограмм, получающихся похожими на уравнение Фоккера-Планка, отличаются только во втором порядке при разложении потенциала по \hbar . Таким образом, и квантовую и классическую механику можно сформулировать на одном и том же языке, что упрощает исследование предельных переходов между классической и квантовой механиками. Более того, в классической механике можно ввести и матрицу плотности для характеристики классического состояния [25], являющуюся аналогом матрицы плотности в квантовой механике, при этом отличие в формулах преобразования будет сводиться к замене функции Вигнера настоящей совместной функцией распределения $f(q, p)$ на фазовой плоскости. В частности, используя данный подход, было показано, что любому классическому состоянию соответствует не положительно определённая матрица плотности в отличие от квантового состояния, всегда описываемого положительно определённой матрицей плотности.

Аналогично тому, как мойаловская трактовка квантовой механики, основанная на функции Вигнера, имеет интерпретацию на языке звёздочного произведения (символы Вигнера-Вейля и ядро их звёздочного произведения) [27], [3], томографический подход к описанию квантовой и классической механик также может быть сформулирован на «звёздочном» языке [28]. Ядро звёздочного произведения томографических символов в квантовой механике было найдено в работе [28], а в классической механике - в [29]. В [29] также были найдены томографические символы для координаты, импульса и произведения их произвольных степеней в явной проинтегрированной форме. По аналогии с обычными

квантовыми символами Вейля могут быть рассмотрены их аналоги и в классической механике - так называемые *классические* символы Вейля, ядро звёздочного произведения которых в проинтегрированном виде и классический символ Вейля произведения координаты и импульса также были найдены в [29].

Хорошим свойством томограммы квантового состояния является его измеримость, что было продемонстрировано на экспериментах по гомодинной томографии с фотонами (см., например, [30]- [32]). Таким образом, экспериментально получаемая томограмма уже содержит в себе всю необходимую информацию о квантовом состоянии системы и может использоваться в дальнейших расчётах непосредственно без перехода к волновой функции или матрице плотности, что позволяет существенно увеличить точность вычислений по получаемым экспериментальным данным и избавиться от ряда сложностей, существовавших при непосредственных измерениях матрицы плотности.

Ввиду полноты описания томографическим подходом квантовой механики введение волновой функции или матрицы плотности, сыгравших роль «вспомогательных лесов» при построении теории, не является необходимым, хотя как элемент математической конструкции и удобный инструмент для решения многих задач подход, основанный на использовании Гильбертова пространства состояний и операторов плотности играл и будет продолжать играть важную роль.

В настоящей работе были решены три задачи, представленные в следующих трёх главах, посвящённые развитию томографических методов для решения задач квантовой и классической механики.

В 1-й главе изложены основные положения томографического подхода к квантовой и классической механикам, известные до выполнения настоящей работы.

Во 2-й главе в явном проинтегрированном виде получены ядра звёздочных произведений для классических томографических символов и матриц операторов в классической механике в координатном представлении; томографические символы произвольной степени координаты, произвольной степени импульса и произведения координаты и импульса в классической и квантовой механиках; томографические символы для произведения произвольных целых степеней координаты и импульса в классической механике; а также матрица оператора произведения координаты и импульса в классической механике. Данные результаты дополняют общую картину методов, основанных на использовании разных изоморфизмов в механике и изложенных в Гл. 1.

Дальнейшие главы посвящены исследованию явления запутанности в разных кванто-

вых системах на примере бесспиновой системы, описываемой волновой функцией (Гл. 3) и системы со спином (Гл. 4).

В 3-й главе с помощью квантовой томографии исследована эволюция запутанности гауссовских состояний двумерного квантового осциллятора с трением и переменной частотой, а также состояний в системе с гамильтонианом более общего вида, содержащего перекрёстный член с произведением операторов координат.

В 4-й главе получены общие формулы спиновых томограмм для случаев частиц со спином $j = 1$, $j = \frac{3}{2}$ и системы двух частиц со спином $j = \frac{1}{2}$. Для состояний с определённой проекцией спина частиц со спином $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$, для *обычного* и *обобщённого состояний Вернера частицы со спином $j = \frac{3}{2}$* , а также для состояния Вернера системы двух спинов $j = \frac{1}{2}$ были построены и исследованы графики томографических характеристик состояний: спиновых томограмм, томографической энтропии и томографической информации.

Глава 1

Основные положения томографических методов в механике

1.1 Изоморфизм различных представлений состояний механических систем

Стандартная дираковская формулировка квантовой механики постулирует соответствие множества всевозможных квантовых состояний систем некоторому линейному гильбертовому пространству, вектора $|\psi\rangle$ которого, называемые векторами состояния, описывают все допустимые состояния изолированных квантовых систем, более же общие случаи смешанных состояний квантовых систем описываются операторами плотности $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$. Физическим величинам в дираковском подходе ставится в соответствие некоторый эрмитов оператор, действующий в пространстве состояний. В качестве базиса, в котором задаются операторы физических величин и векторы состояний могут быть выбраны собственные вектора любого эрмитового оператора, задание которого соответствует выбору «представления» данных векторов состояний и операторов физических величин. Наиболее часто используемыми представлениями являются координатное, импульсное, представление когерентных состояний и собственных состояний осциллятора (фоковский базис) для векторов состояний в бесконечномерном гильбертовом пространстве, а также собственное представление для операторов квадрата момента и проекции момента в конечномерном гильбертовом пространстве спиновых состояний. Все представления такого рода, соответствующие выбору некоторого базиса, являются физически эквивалентными, переход же от одного представления к другому задаётся некоторым унитарным опера-

тором, действующим в пространстве состояний и осуществляющим поворот базисных векторов.

Ключевым фактором, объединяющим всевозможные представления в дираковском подходе, является постулирование структуры множества состояний квантовых систем - линейного пространства. Задание линейности пространства состояний позволяет использовать простой и удобный с математической точки зрения аппарат для изложения квантовой механики и решения многих квантовомеханических задач. С другой стороны, линейное пространство является достаточно частным случаем возможной структуры на множестве состояний, что, как было показано, может приводить к усложнению решения некоторых квантовомеханических задач в дираковской формулировке. Пространство состояний задаётся над полем комплексных чисел, использование же комплексных функций при описании квантовых систем более тяжело воспринимается с интуитивной точки зрения и не всегда является удобным для решения некоторых задач. Выходом из ситуации является отказ от использования линейности пространства на множестве состояний квантовых систем и использование более общих, интегральных преобразований, не сводящихся к действию унитарного оператора на вектор состояния $|\psi\rangle$ для перехода к другим «представлениям» - формулировкам квантовой механики.

В данной главе с разной степенью подробности будут рассмотрены две такие формулировки квантовой механики, существующие параллельно дираковской и независимые от неё (для простоты условимся пока не рассматривать спиновые состояния): вейлевская формулировка квантовой механики, описывающая состояние квантовой системы с помощью функции Вигнера - квазираспределения на фазовой плоскости системы (см. [3]) и томографическая формулировка квантовой механики, описывающая состояние квантовой системы обычной функцией распределения вероятностей, называемой симплектической томограммой [11]. Обе указанные формулировки обеспечивают ряд хороших свойств объектов, описывающих квантовые состояния. В то время как обычная теория представлений, используемая в дираковском подходе и основанная на использовании различных базисов в пространстве состояний, реализует собой изоморфизм относительно операции сложения векторов состояния, вейлевская и томографическая формулировки квантовой механики реализуют уже «изоморфизм более высокого уровня» разных подходов к описанию квантовых систем. Смысл, в котором понимается изоморфизм для таких, существующих параллельно дираковской формулировкам квантовой механики, будет изложен ниже.

Рассматриваемые формулировки квантовой механики обычно вводят следующим образом, как это и было сделано исторически: матрицу плотности находят из запостулированной дираковской формулировки квантовой механики, из матрицы плотности в координатном представлении с помощью интегрального преобразования находят функцию Вигнера, а из функции Вигнера интегральным преобразованием получают симплектическую томограмму. Таким образом, квантовомеханическая матрица плотности в координатном представлении является точкой входа в данную цепочку преобразований. В силу эквивалентности указанных формулировок квантовой механики все интегральные преобразования, реализующие переходы от одной формулировки к другой, являются обратимыми. Кроме того, указанные преобразования имеют прозрачный физический смысл, что будет показано далее.

Перейдём к рассмотрению понятия состояния в классической механике.

Состояние классической частицы в механике в любой момент времени можно описать точкой на фазовой плоскости (q, p) , при этом эволюции во времени будет соответствовать некоторая кривая на фазовой плоскости. В общем случае, при наличии флуктуаций в классической механике (например, при помещении частицы в газ при температуре T) состояние частицы вместо точки будет задаваться некоторой положительной нормированной функцией распределения $f(q, p)$ на фазовой плоскости:

$$f(q, p) \geq 0,$$

$$\int f(q, p) dq dp = 1.$$

По своему физическому смыслу функция Вигнера в квантовой механике является наиболее близким аналогом обычной функции распределения $f(q, p)$, задающей состояние в классической механике. Согласно вышесказанному, есть некоторая связь, выражаемая интегральным преобразованием, между функцией Вигнера в квантовой механике и квантовомеханической матрицей плотности. Пользуясь аналогией между функцией Вигнера в квантовой механике и функцией распределения на фазовой плоскости в классической механике в формулы обратимого перехода между матрицей плотности в координатном представлении и функцией Вигнера может быть подставлена и $f(q, p)$, задающая состояние в классической механике. Данный приём позволяет сконструировать квантовомеханический подход к описанию классических состояний, поставив в соответствие обычной функции распределения $f(q, p)$ в классической механике его *классическую матрицу плотности в координатном представлении*, являющуюся аналогом обычной квантовой

матрицы плотности. Аналогично, пользуясь соответствием между $f(q, p)$ и функцией Вигнера, можно получить и томограмму классического состояния [26]. Таким образом, пользуясь аналогией, можно построить классические аналоги всех вышеприведённых формулировок квантовой механики. Позже будет изложен физический смысл проводимых интегральных преобразований в классической механике и будет показано, что квантовая механика не является сколь-нибудь выделенной по правомочности применения данных интегральных преобразований. Томографический (вероятностный) и квантовомеханический подходы к описанию классических состояний были рассмотрены в недавних работах [25, 26, 33, 34, 35], сама же возможность объединения квантовых и классических степеней свободы обсуждалась в работе [36].

В случае квантовой механики имеет место соотношение неопределённостей для координаты и импульса, характеризуемое постоянной Планка \hbar , вследствие которого меньшим значениям постоянной Планка соответствуют меньшие флуктуации координаты и импульса, и наоборот; при описании же состояний в классической механике постоянная Планка не вводится.

До сих пор не упоминалось о том, во что переходят действия операторов в дираковской формулировке квантовой механики при переходе к другим эквивалентным формулировкам и о том, во что переходят операторы при переходе из квантовой механики в классическую. Для ответа на этот вопрос воспользуемся так называемым формализмом *звёздочного произведения* [37] - удобным математическим языком описания всех вышеупомянутых изоморфизмов, который позволит в простой унифицированной форме описать как ранее известные дираковскую и вейлевскую формулировки квантовой механики, так и все остальные вышеупомянутые формулировки квантовой и классической механики.

1.2 Формализм звёздочного произведения

В отличие от подхода, основанного на теории операторов в некотором векторном пространстве, основными объектами, с которыми работает звёздочное произведение, являются функции, называемые символами. В общем случае символы могут являться обобщёнными функциями. На множестве символов - некоторых функций, задаётся бинарная операция, называемая звёздочным произведением символов, которая позволяет поставить в соответствие некоторым двум символам третий. Данная операция технически обычно осуществляется некоторым ядром интегрального преобразования.

Закон соответствия между операторным подходом к описанию систем и подходом, основанным на звёздочном произведении, формулируется следующим образом.

Для наглядности условимся рассматривать линейное пространство векторов состояний, используемое в дираковском подходе к описанию квантовой механики, то есть под операторами будем подразумевать именно операторы физических величин. Для каждого типа звёздочного произведения зададим два набора операторов: $\hat{U}(\vec{x})$ и $\hat{D}(\vec{x})$, где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ - точка из некоторого многообразия (см. работы [38]- [41]). Переменные \vec{x} в общем случае могут быть как дискретными, так и непрерывными, но в данной работе мы ограничимся рассмотрением случая только непрерывных переменных $x_s \in R$ ($s = 1, 2, \dots, N$). Операторы $\hat{D}(\vec{x})$ называются *квантайзерами*, а операторы $\hat{U}(\vec{x})$ - *деквантайзерами* по причинам, изложенным ниже.

Каждому оператору \hat{A} , действующему в общем с квантайзерами и деквантайзерами гильбертовом пространстве \mathcal{H} поставим в соответствие функцию, называемую символом оператора \hat{A} , по следующему закону:

$$f_A(\vec{x}) = \text{Tr } \hat{A} \hat{U}(\vec{x}), \quad (1.1)$$

где предполагается существование указанного следа. Таким образом, деквантайзер $\hat{U}(\vec{x})$ позволяет отображать оператор на функцию - символ оператора, то есть «деквантизировать» квантовую наблюдаемую. При условии существования обращения соотношения (1.1) в форме

$$\hat{A} = \int f_A(\vec{x}) \hat{D}(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (1.2)$$

где предполагается существование меры $d\vec{x}$ на некотором многообразии и возможность восстановления оператора \hat{A} по его символу $f_A(\vec{x})$, оператор $\hat{D}(\vec{x})$ играет противоположную роль, позволяя отображать функцию $f_A(\vec{x})$ (классическую наблюдаемую) на оператор \hat{A} (квантовую наблюдаемую), то есть «квантизировать» функцию. Подстановка (1.2) в (1.1) приводит к условию совместимости полученных отображений:

$$\text{Tr } \hat{U}(\vec{x}) \hat{D}(\vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (1.3)$$

где $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ понимается как дельта-функция Дирака в случае $x_s \in R$, $s = 1, 2, \dots, N$ и как дельта-символ Кронекера в случае дискретных переменных.

Звёздочное произведение символов $f_A(\vec{x})$ и $f_B(\vec{x})$ операторов \hat{A} и \hat{B} определяется посредством следующих правил:

$$\hat{A} \hat{B} \leftrightarrow f_A(\vec{x}) * f_B(\vec{x}) := f_{AB}(\vec{x}),$$

при этом, полагая произведение операторов ассоциативным, мы получим звёздочное произведение функций (символов операторов) также ассоциативным:

$$(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}) \rightarrow (f_A(\vec{x}) * f_B(\vec{x})) * f_C(\vec{x}) = f_A(\vec{x}) * (f_B(\vec{x}) * f_C(\vec{x})).$$

Полученное таким образом ассоциативное звёздочное произведение в некоторых частных случаях может сводиться к поточечному произведению функций или закону наподобие обычного произведения матриц, где осуществляется свёртка по паре индексов, в общем же случае оно может быть описано ядром некоторого интегрального оператора $K(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x})$:

$$f_A(\vec{x}) * f_B(\vec{x}) = \int K(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}) f_A(\vec{x}_1) f_B(\vec{x}_2) d\vec{x}_1 d\vec{x}_2. \quad (1.4)$$

Выражение для ядра может быть получено в явном виде с помощью соотношений (1.1) и (1.2):

$$K(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}) = \text{Tr}(\hat{D}(\vec{x}_1)\hat{D}(\vec{x}_2)\hat{U}(\vec{x})). \quad (1.5)$$

Рассмотренное ядро звёздочного произведения символов является линейным по отношению к оператору-деквантайзеру и нелинейным по отношению к оператору-квантайзеру. Таким образом, ввиду нелинейности имеется асимметрия ядра по отношению к операторам-квантайзерам и деквантайзерам.

Дадим интерпретацию приведённым в предыдущем параграфе формулировкам квантовой и классической механики с точки зрения звёздочного произведения.

В общем случае в дираковской формулировке квантовой механики состояние можно задавать оператором плотности, что позволит описать все квантовомеханические преобразования как операции с матрицами операторов. Поскольку произведение матриц - в общем случае свёртка двух матриц по паре индексов - может быть задана некоторым ядром интегрального преобразования, это даёт лёгкий путь для интерпретации дираковского подхода, использующего координатное представление, на языке звёздочного произведения: матрица плотности в координатном представлении является *символом оператора плотности с точки зрения звёздочного произведения для операторов в координатном представлении*. Поскольку операторы в квантовой механике в общем случае не коммутируют, то и ядро звёздочного произведения этих операторов, в силу соответствия, не будет коммутативным. Аналогичное утверждение может быть сделано и в классической механике: классические матрицы плотности в координатном представлении, полученные из функции распределения на фазовой плоскости, являются символами с точки зрения звёздочного произведения, однако ядро, соответствующее звёздочному произведению символов

- классических матриц плотности, будет коммутативным в отличие от квантовомеханического случая. Коммутативность ядра в классическом случае следует из коммутативности произведения функций (поточечного) на фазовой плоскости, задающих классическое состояние.

Вейлевский подход к описанию квантовой [3, 27] и классической [25, 26] механик имеет следующую интерпретацию на звёздочном языке: функция Вигнера и функция распределения $f(q, p)$ на фазовой плоскости являются, соответственно, *квантовым* и *классическим символами Вейля* (условимся называть обычные символы Вейля квантовыми, чтобы отличать их от классических), описывающими состояние, причём ядро произведения квантовых символов Вейля является некоммутативным, ядро же произведения классических символов Вейля коммутативно и поточечно в силу поточечности произведения функций на фазовой плоскости в классической механике. Каждому квантовомеханическому оператору может быть поставлен в соответствие его квантовый символ Вейля, с другой стороны, реализуя квантовомеханический подход к классической механике, по каждому классическому символу Вейля может быть построен его оператор в классической механике - аналог обычного оператора в квантовой механике дираковского подхода. Операторы-квантайзеры и деквантайзеры, позволяющие отобразить квантовомеханические операторы на функции в фазовой плоскости - символы Вейля, будут приведены позже.

В вейлевском подходе и подходе, основанном на матрицах плотности, объекты, описывающие состояние, обладают несколько разной природой: функция Вигнера может быть отрицательной и не является совместной функцией распределения двух случайных величин - координаты и импульса (это следует из соотношения неопределённостей Гайзенберга) в отличие от функции распределения на фазовой плоскости в классической механике, классическая же матрица плотности может не являться положительно определённой в отличие от всегда положительно определённой матрицы плотности в квантовой механике.

Достаточно близкими и удобными с точки зрения своих свойств, а также для сравнения квантовой и классической механик, являются томограммы состояния в классической и квантовой механиках. Обе механики в рамках томографического подхода описываются одним и тем же объектом - томограммой квантового состояния, являющейся обычной функцией распределения вероятности (см. работы [11, 13], [38]- [51]). Сравнение квантовой и классической картин в представлениях, оперирующих разными объектами (вол-

новой функцией и матрицей плотности в случае квантовой механики и распределением вероятности в фазовом пространстве в случае классической механики) представляется более сложным.

С точки зрения звёздочного произведения томограмма квантового состояния является квантовым томографическим символом квантовомеханического оператора плотности, томограмма же классического состояния может интерпретироваться как классический томографический символ, восстанавливаемый по функции распределения на фазовой плоскости - классическому символу Вейля. Соответственно, квантайзер и деквантайзер для звёздочного произведения томографических символов позволяют сопоставлять любому квантовомеханическому оператору его квантовый томографический символ в томографическом подходе. В общем случае, томографические символы могут быть найдены для широкого класса функций на фазовой плоскости, например, для произведений координат и импульсов произвольных целых степеней (см. результаты, полученные в Гл. 2). Аналогично предыдущим приведённым формулировкам квантовой и классической механики одним из ключевых отличий томографического подхода в классической механике является коммутативность ядра классических томографических символов, отсутствующая в квантовом случае (см. результаты Гл. 2).

Ядро звёздочного произведения классических наблюдаемых на фазовой плоскости (q, p) и ядро коммутативного звёздочного произведения классических томографических символов, наряду с самими томографическими символами наблюдаемых, обсуждались в работе [25] (см. также [52]), где была упомянута возможность получения ядра звёздочного произведения для классических томографических символов с помощью ядра поточечного звёздочного произведения в фазовом пространстве (ядра для *классических символов Вейля*) и ядра звёздочного произведения в координатном представлении (ядра для звёздочного произведения *классических матриц плотности* - аналогов матрицы плотности в квантовой механике). В Гл. 2 в настоящей работе ядро звёздочного произведения классических томографических символов будет получено явно.

Рассмотренные параллели между квантовой и классической механиками, а также разными подходами к описанию механических систем схематически изображены в нижеприведённой таблице.

Спиновые состояния в квантовой механике также могут быть описаны в рамках томографического подхода с помощью функции распределения проекций спина частиц системы, зависящей от сферических углов - *спиновой томограммы*. Интерпретация спиновой

томографии на языке звёздочного произведения была дана в работе [53].

Изоморфизм различных типов звёздочных произведений в квантовой и классической механиках в совокупности с принципом соответствия функции Вигнера в квантовой механике классической функции распределения на фазовой плоскости в классической механике, как единственного отличия квантовой и классической механик с точки зрения звёздочного произведения, позволяет сделать следующий вывод: если в вейлевском звёздочном произведении квантовый и классический символы совпали, то они совпадут и во всех других типах звёздочного произведения. Справедливо и более сильное утверждение в силу изоморфизма звёздочных произведений: *если квантовый и классический символы совпадают в какой-либо одной схеме звёздочного произведения, то они совпадают и во всех других его схемах*

Язык звёздочного произведения позволяет сформулировать очень простой и удобный для вычислений принцип соответствия между физическими наблюдаемыми классической механики и их квантовомеханическими операторами, эквивалентный принципу соответствия Вейля: если физическую наблюдаемую - функцию на фазовой плоскости - интерпретировать как классический символ Вейля, то восстанавливаемая по ней матрица оператора в координатном представлении в классической механике - символ оператора в координатном представлении в классической механике - в точности будет равна квантовомеханическому оператору данной физической наблюдаемой. Данный принцип соответствия в более красивой форме может быть сформулирован так: *в любой схеме звёздочного произведения квантовый и классический символы любой физической наблюдаемой совпадают.*

Далее будут более подробно рассмотрены вышеприведённые примеры звёздочного произведения, используемого в квантовой и классической механиках, формализм применения операторов в гильбертовом пространстве к классической механике, аналогично тому, как это делается в квантовом случае и приведены соотношения, реализующие связь между разными подходами к описанию механических систем.

Некоторые изоморфизмы механики относительно звёздочного произведения (таблица соответствия символов)		
Тип представления	Механика	
	Классическая	Квантовая
Томографический подход	Классические томографические символы и томограмма классического состояния	Квантовые томографические символы и томограмма квантового состояния
Функции на фазовой плоскости	Классические символы Вейля и функция распределения на фазовой плоскости	(Квантовые) символы Вейля и функция Вигнера (квазираспределение)
Координатное представление	Матрица оператора в координатном представлении в классической механике и матрица плотности в классической механике в координатном представлении	Матрица оператора в координатном представлении в квантовой механике и матрица плотности в квантовой механике в координатном представлении

1.3 Символы Вейля и матрицы операторов в квантовой механике

В квантовой механике вейлевские символы операторов, действующих в гильбертовом пространстве, были введены в работах [3, 27] с помощью следующих операторов-деквантайзеров и квантайзеров:

$$\hat{U}(\vec{x}) = 2\hat{D}(2\alpha)\hat{I}, \quad \hat{D}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi}\hat{D}(2\alpha)\hat{I}, \quad (1.6)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2) \equiv (q, p)$, \hat{I} есть оператор чётности, действующий на волновую функцию:

$$\hat{I}\psi(x) = \psi(-x), \quad (1.7)$$

а через $\hat{D}(\gamma)$ обозначен унитарный оператор сдвига, переводящий вакуумное состояние $|0\rangle$ в когерентное состояние $|\gamma\rangle$:

$$\hat{D}(\gamma)|0\rangle = |\gamma\rangle. \quad (1.8)$$

Опреатор сдвига имеет вид:

$$\hat{D}(\gamma) = \exp(\gamma \hat{a}^\dagger - \gamma^* \hat{a}), \quad (1.9)$$

где операторы рождения и уничтожения \hat{a}^\dagger и \hat{a} удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (1.10)$$

Комплексное число α в формуле (1.6) определяется как

$$\alpha = \frac{q + ip}{\sqrt{2}}.$$

Можно показать, что обычное определение вейлевского символа оператора \hat{A} с помощью выражения

$$f_A(q, p) = 2 \operatorname{Tr}(\hat{A} \hat{D}(2\alpha) \hat{I}) \quad (1.11)$$

эквивалентно определению через матричные элементы этого оператора в координатном представлении

$$A(x, x') = \langle x | \hat{A} | x' \rangle \quad (1.12)$$

- преобразованию Фурье

$$f_A(q, p) = \int A\left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2}\right) e^{-ipu} du, \quad (1.13)$$

обращение которого даётся соотношением:

$$A(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int f_A\left(\frac{x+x'}{2}, p\right) e^{ip(x-x')} dp. \quad (1.14)$$

Функция Вигнера $W(q, p)$ (см. [3]) является символом Вейля оператора плотности $\hat{\rho}$ квантового состояния, а, следовательно,

$$W(q, p) = \int \rho\left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2}\right) e^{-ipu} du. \quad (1.15)$$

Условие нормировки для матрицы плотности

$$\int \rho(q, q) dq = 1$$

приводит к нормированности и функции Вигнера:

$$\frac{1}{2\pi} \int W(q, p) dq dp = 1.$$

В квантовой механике звёздочное произведение матричных элементов операторов \hat{A} и \hat{B} в координатном представлении - функций двух переменных $A(x, x')$ и $B(x, x')$ - является

некоммутативным, но ассоциативным и определяется стандартным правилом перемножения матриц

$$A(x, x') * B(x, x') = \int A(x, y)B(y, x') dy, \quad (1.16)$$

которое может быть представлено в стандартной форме

$$A(x, x') * B(x, x') = \int A(y_1, z_1)B(y_2, z_2)K(y_1, z_1, y_2, z_2, x, x') dy_1 dz_1 dy_2 dz_2 \quad (1.17)$$

с ядром звёздочного произведения

$$K(y_1, z_1, y_2, z_2, x, x') = \delta(x - y_1)\delta(z_2 - x')\delta(z_1 - y_2). \quad (1.18)$$

Вычисление звёздочного произведения символов Вейля - компонент Фурье (1.13) с учётом найденного ядра (1.18) (ядра звёздочного произведения символов операторов в координатном представлении в квантовой механике) приводит к результату

$$K(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3) = \frac{1}{\pi^2} \exp \left[2i \left(p_2 q_1 - p_1 q_2 + p_3 q_2 - p_2 q_3 + p_1 q_3 - p_3 q_1 \right) \right], \quad (1.19)$$

известному как ядро Гронвольда [54].

1.4 Символы Вейля и матрицы операторов в классической механике

Рассмотрим взаимосвязь между звёздочным произведением в вейлевском представлении и звёздочным произведением для матриц операторов в координатном представлении для классической механики аналогично квантовому случаю, описанному в предыдущем параграфе.

Связь между матрицей плотности $\rho_{\text{cl}}(x, x')$ классического состояния и его представлением $f(q, p)$ на фазовой плоскости была определена в работах [25, 26] в виде соотношений

$$\begin{aligned} \rho_{\text{cl}}(x, x') &= \frac{1}{2\pi} \int f \left(\frac{x + x'}{2}, p \right) e^{ip(x-x')} dp, \\ f(q, p) &= \int \rho_{\text{cl}} \left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2} \right) e^{-ipu} du. \end{aligned} \quad (1.20)$$

аналогичных формулам (1.13), (1.14) в квантовой механике. В случае произвольной функции $f(q, p)$ на фазовой плоскости, которая понимается как классический символ Вейля, соотношения (1.20) дают связь между символом оператора в координатном представлении в классической механике, соответствующим символу Вейля $f(q, p)$ и самим символом Вейля.

Ядро звёздочного произведения классических символов операторов в координатном представлении было найдено в работах [25, 52] с помощью ядра звёздочного произведения классических символов Вейля [55] в виде:

$$K(x, x', x_1, x_2, x'_1, x'_2) = \int \delta(x - x' - u_1 - u_2) \delta\left(x_1 - \frac{x + x'}{2} - \frac{u_1}{2}\right) \delta\left(x_2 - \frac{x + x'}{2} + \frac{u_1}{2}\right) \times \delta\left(x'_1 - \frac{x + x'}{2} - \frac{u_2}{2}\right) \delta\left(x'_2 - \frac{x + x'}{2} + \frac{u_2}{2}\right) du_1 du_2. \quad (1.21)$$

Коммутативность (поточечность) звёздочного произведения классических символов Вейля - функций на фазовой плоскости в классической механике - приводит к коммутативности и ядра (1.21). Таким образом, звёздочное произведение двух классических символов операторов в координатном представлении $\rho_{1cl}(x_1, x_2)$ и $\rho_{2cl}(x'_1, x'_2)$ с учётом найденного ядра может быть представлено в виде (см. [25]):

$$(\rho_{1cl} * \rho_{2cl})(x, x') = \rho_{1cl}(x_1, x_2) * \rho_{2cl}(x'_1, x'_2) = \int K(x, x', x_1, x_2, x'_1, x'_2) \rho_{1cl}(x_1, x_2) \rho_{2cl}(x'_1, x'_2) dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2.$$

В случае совпадающих квантовых и классических символов Вейля каких-либо наблюдаемых в силу соотношений (1.20) символы этих наблюдаемых в координатном представлении в классической и квантовой механиках также будут совпадающими, что находится в соответствии со сказанным в параграфе о звёздочном произведении. В частности, поскольку и квантовые и классические вейлевские символы операторов координаты и импульса равны, соответственно, $A(q, p) = q$ и $B(q, p) = p$, матрицы операторов координаты и импульса (символы операторов координаты и импульса) в координатном представлении в классической механике будут такими же как и в квантовой:

$$\begin{aligned} \langle x_1 | \hat{A}_{cl} | x_2 \rangle &= x_2 \delta(x_1 - x_2), \\ \langle x_1 | \hat{B}_{cl} | x_2 \rangle &= i \frac{\partial}{\partial x_2} \delta(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

1.5 Метод симплектической томографии в механике

Рассмотрим томографические методы в механике, позволяющие описывать одновременно и квантовую и классическую механику с единых позиций и задавать как квантовое, так и классическое состояние одним и тем же объектом - симплектической томограммой.

Симплектическая томография в квантовой механике является схемой квантования с помощью звёздочного произведения, основанной на следующих деквантайзерах и квантайзерах:

$$\hat{U}(\vec{x}) \equiv \hat{U}(X, \mu, \nu) = \delta(X - \mu\hat{q} - \nu\hat{p}), \quad (1.22)$$

$$\hat{D}(\vec{x}) \equiv \hat{D}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \exp[i(X - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})].$$

Для данного звёздочного произведения символ оператора \hat{A} , называемый квантовым томографическим символом, имеет вид:

$$w_A(X, \mu, \nu) = \text{Tr}(\hat{A} \delta(X - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})), \quad (1.23)$$

где \hat{p} и \hat{q} - операторы импульса и координаты - действуют на волновую функцию в координатном представлении $\psi(x)$ в случае $\hbar = 1$ как

$$\hat{q}\psi(x) = x\psi(x),$$

$$\hat{p}\psi(x) = -i\frac{\partial}{\partial x}\psi(x),$$

а δ -функция от оператора в (1.23) определяется как интеграл Фурье:

$$\delta(X - \mu\hat{q} - \nu\hat{p}) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(X - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})} dk.$$

Томографический символ $w_A(X, \mu, \nu)$ обладает свойством однородности:

$$w_A(\lambda X, \lambda\mu, \lambda\nu) = \frac{1}{|\lambda|} w_A(X, \mu, \nu). \quad (1.24)$$

Ядро звёздочного произведения томографических символов в квантовой механике, согласно (1.5), даётся соотношением

$$K(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2, X, \mu, \nu) = \text{Tr}\left(\hat{D}(X_1, \mu_1, \nu_1)\hat{D}(X_2, \mu_2, \nu_2)\hat{U}(X, \mu, \nu)\right), \quad (1.25)$$

которое было вычислено в работах [39, 40]:

$$\begin{aligned} K(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2, X, \mu, \nu) &= \frac{1}{4\pi^2} \delta\left(\nu(\mu_1 + \mu_2) - \mu(\nu_1 + \nu_2)\right) \\ &\times \exp\left(iX_1 + iX_2 + \frac{i}{2}(\nu_1\mu_2 - \nu_2\mu_1) - i\frac{(\nu_1 + \nu_2)X}{\nu}\right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Аналогично рассмотренной в предыдущих параграфах вейлевской схеме звёздочного произведения квантовый томографический символ оператора плотности $\hat{\rho}$, также как

и его вейлевский символ - функция Вигнера $W(q, p)$, является полноценной характеристикой квантового состояния, описываемого матрицей плотности $\langle x|\hat{\rho}|x'\rangle$, и называется *симплектической томограммой* квантового состояния:

$$w_{\hat{\rho}}(X, \mu, \nu) = \text{Tr}(\hat{\rho}\delta(X - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})). \quad (1.27)$$

Для краткости, как это принято, условимся называть симплектическую томограмму состояния в механике просто *томограммой*, а также опускать индекс $\hat{\rho}$.

Томограмма в квантовой и классической механиках $w(X, \mu, \nu)$ другим способом может быть определена через вейлевское представление состояния согласно соотношениям:

$$\begin{aligned} w(X, \mu, \nu) &= \frac{1}{2\pi} \int F(q, p) \delta(X - \mu q - \nu p) dq dp, \\ F(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int w(X, \mu, \nu) e^{i(X - \mu q - \nu p)} dX d\mu d\nu, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где $F(q, p)$ - описывающая состояние нормированная функция распределения на фазовой плоскости $f(q, p)$ в случае классической механики или функция Вигнера $W(q, p)$, задающая состояние квантовомеханической системы. Условие нормировки в обоих случаях полагается одним и тем же:

$$\frac{1}{2\pi} \int F(q, p) dq dp = 1$$

Замена функции $F(q, p)$ в соотношениях (1.28) произвольными квантовыми или классическими символами Вейля позволяет отображать их на томографические символы квантовой, соответственно, или классической механики, что может быть взято за определение томографических символов в обеих механиках.

Поскольку квантовый и классический символы, соответствующие одной и той же физической наблюдаемой, совпадают друг с другом в любой схеме звёздочного произведения, то, в частности, квантовые томографические символы координаты и импульса, а также квантовый единичный томографический символ (символ, соответствующий единичному оператору) совпадают с классическими. Впервые единичный томографический символ был найден в работе [56]:

$$w_1(X, \mu, \nu) = -\pi |X| \delta(\mu) \delta(\nu). \quad (1.29)$$

Соотношения (1.28) имеют прозрачный физический смысл: связь между функцией $F(q, p)$ и томограммой в точности соответствуют прямому и обратному преобразованиям Радона (см. [8]). Задача Радона заключалась в восстановлении распределения плотности

на куске плоскости по известному весу всех его пересекающих прямых. В случае вейлевского символа, характеризующего состояние системы, роль плоскости в задаче Радона играет фазовая плоскость системы (q, p) , а роль восстанавливаемой функции - истинная функция распределения $f(q, p)$ в случае классической механики и квазираспределение - функция Вигнера $W(q, p)$ - в случае квантовой механики.

По своему физическому смыслу томограмма и в квантовом и в классическом случаях есть нормированная функция распределения случайной переменной X :

$$w(X, \mu, \nu) \geq 0, \quad (1.30)$$

$$\int w(X, \mu, \nu) dX = 1, \quad (1.31)$$

где числа μ и ν , связанные с поворотом фазовой плоскости на угол θ и коэффициентом перемасштабирования осей q и p s как

$$\mu = s \cos \theta, \quad \nu = s^{-1} \sin \theta, \quad (1.32)$$

задают различные системы отсчёта в фазовом пространстве системы, а X является координатой, измеряемой в повернутом фазовом пространстве, которое задаётся числами μ и ν . Параметры X, μ, ν являются произвольными вещественными числами: $-\infty < X, \mu, \nu < \infty$.

В силу свойства однородности любых томографических символов (1.24), следующей, например, из соотношений (1.28) (из однородности δ -функции), томограмма и в квантовой и в классической механиках является функцией только двух независимых переменных.

Уравнение Шредингера, описывающее эволюцию квантовых состояний, может быть переписано в терминах любой независимой формулировки квантовой механики, в частности для симплектической томограммы в квантовой механике. Эволюция же томограммы классического состояния, также как и квантового, описывается похожим интегродифференциальным уравнением. В частности, квантовый пропагатор в томографическом представлении $\Pi(\mathbf{X}, \mu, \nu, \mathbf{X}', \mu', \nu', t)$, соответствующий функции Грина в дираковской формулировке квантовой механики, позволяет записать эволюцию квантового состояния, соответствующего начальному состоянию $w(\mathbf{X}', \mu', \nu', 0)$ в виде [11, 12, 57]:

$$w(\mathbf{X}, \mu, \nu, t) = \int \Pi(\mathbf{X}, \mu, \nu, \mathbf{X}', \mu', \nu', t) w(\mathbf{X}', \mu', \nu', 0) d\mathbf{X}' d\mu' d\nu' \quad (1.33)$$

1.6 Томография спиновых состояний

Спиновые состояния квантовых систем, обычно описываемые спинорами и комплексными матрицами плотности, также могут быть описаны функциями распределения вероятностей, как и состояния с непрерывными переменными. Томографический подход к описанию спиновых систем был развит в работах [13, 43].

Произвольная томографическая схема описания спиновых состояний может быть построена следующим образом.

Рассмотрим систему N спинов, состояние которой задано спиновой матрицей плотности $\rho_{\vec{m}_1\vec{m}_2}$ в базисе состояний с определёнными проекциями спина на ось z , а $U(\vec{\varphi})$ - произвольная унитарная матрица, зависящая от углов $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, параметризующих унитарное преобразование. Данное состояние может быть в общем случае описано *унитарной спиновой томограммой* $\omega(\vec{m}, \vec{\varphi})$ которая впервые была введена в работе [16] с помощью соотношения:

$$\omega(\vec{m}, \vec{\varphi}) = \sum_{\vec{m}'_1, \vec{m}'_2 = \vec{R}}^{-\vec{R}} U_{\vec{m}\vec{m}'_1}(\vec{\varphi}) \rho_{\vec{m}'_1\vec{m}'_2} U_{\vec{m}\vec{m}'_2}^*(\vec{\varphi}), \quad (1.34)$$

где через \vec{R} и $-\vec{R}$ обозначены состояния, в которых все частицы системы имеют, соответственно, максимальные и минимальные спиновые проекции. По своему физическому смыслу унитарная томограмма является вероятностью обнаружения спиновых проекций \vec{m} у частиц рассматриваемой системы в системе координат, повернутой в унитарном пространстве с помощью матрицы $U(\vec{\varphi})$. С технической точки зрения компоненты унитарной томограммы есть диагональные коэффициенты матрицы плотности, повернутой в некотором унитарном пространстве. Унитарная томограмма является объектом, эквивалентным по информативности спиновой матрице плотности и содержит в себе ровно столько же информации о спиновом состоянии, сколько и спиновая матрица плотности.

Унитарная матрица $U(\vec{\varphi})$ в общем случае осуществляет как локальные, так и нелокальные преобразования, в частности, для спиновой системы, состоящей из двух подсистем, локальное преобразование описывается унитарной матрицей $U(1) \otimes U(2)$, где $U(1)$ и $U(2)$ - унитарные матрицы, действующие на соответствующие подсистемы.

В некоторых важных частных случаях матрица $U(\vec{\varphi})$ может иметь смысл поворота в обычном конфигурационном пространстве. В частности, для систем с определённым спином j , состояние которых задаётся спиновой матрицей $\rho_{m'_1 m'_2}^{(j)}$ в стандартном базисе $|jm\rangle$ -состояний, а вращение в (1.34) производится посредством D -функций Вигнера

$D_{m_1 m_2}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$ (см., например, [58]) (т. е. $\vec{\varphi}$ в данном случае является совокупностью эйлеровских углов α, β и γ) унитарная спиновая томограмма (1.34) называется *спиновой томограммой*

$$\omega^{(j)}(m, \alpha, \beta) = \sum_{m'_1, m'_2=j}^{-j} D_{mm'_1}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \rho_{m'_1 m'_2}^{(j)} D_{mm'_2}^{(j)*}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (1.35)$$

являющейся функцией распределения спиновых проекций на сфере. В силу эквивалентности описания систем посредством спиновой томограммы и спиновой матрицы плотности соотношение (1.35) может быть обращено, что позволяет находить матрицу плотности по известной (или измеренной на эксперименте) томограмме спинового состояния. Формула обращения соотношения (1.35) впервые была приведена в работе [13].

Поскольку томограмма $\omega^{(j)}(-m, \alpha, \beta)$ спинового состояния с определённым спином j есть вероятность обнаружения проекции спина $-m$ на направление (α, β) , вероятность обнаружения проекции m на обратное направление $(\pi + \alpha, \pi - \beta)$ будет точно такой же:

$$\omega^{(j)}(-m, \alpha, \beta) = \omega^{(j)}(m, \pi + \alpha, \pi - \beta) \quad (1.36)$$

и, в частности,

$$\omega^{(j)}(0, \alpha, \beta) = \omega^{(j)}(0, \pi + \alpha, \pi - \beta). \quad (1.37)$$

Вычисление с помощью (1.35) спиновой томограммы $w^{(\frac{1}{2})}(m, \alpha, \beta)$, $m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, соответствующей состоянию частицы со спином $j = \frac{1}{2}$, спиновая матрица плотности которого

$$\rho_{m_1 m_2}^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} & \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \\ \rho_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} & \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \end{pmatrix},$$

$m_1, m_2 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \omega^{(\frac{1}{2})}\left(+\frac{1}{2}, \alpha, \beta\right) &= \rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} e^{i\alpha} \right) \sin \beta, \\ \omega^{(\frac{1}{2})}\left(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta\right) &= \rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} + \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \cos^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} e^{i\alpha} \right) \sin \beta. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Метод описания спиновых систем с помощью томограмм - функций распределений вероятности - позволяет определить для квантового состояния такую вероятностную характеристику как *томографическую энтропию* (см. [59])

$$S(\alpha, \beta) = - \sum_{m=j}^{-j} \omega^{(j)}(m, \alpha, \beta) \ln \omega^{(j)}(m, \alpha, \beta)$$

по аналогии с энтропией фон Ноймана

$${}^V S = - \text{Tr} (\hat{\rho}^{(j)} \ln \rho^{(j)}) . \quad (1.39)$$

Следует заметить, что энтропия фон Ноймана «не различает» чистые квантовые состояния, будучи всегда равной для них нулю, что не так для томографической энтропии.

Спиновая томограмма системы, состоящей из N спинов, определяется в (1.34) посредством вращения с помощью матрицы $U(\vec{\varphi})$, равной прямому (тензорному) произведению матриц поворотов - D -функций Вигнера - всех составляющих систему частиц:

$$U(\vec{\varphi}) = D^{(j_1)}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \otimes D^{(j_2)}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \otimes \dots \otimes D^{(j_N)}(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N), \quad (1.40)$$

при этом углами $\vec{\varphi}$ являются эйлеровские углы всех частиц системы

$(\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N, \gamma_1, \dots, \gamma_N)$. Получаемая таким образом спиновая томограмма $\omega(\vec{m}, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N)$, $\vec{m} = m_1, \dots, m_N$ системы N спинов является вероятностью для рассматриваемой системы иметь спиновую проекцию m_1 для первой частицы на направление (α_1, β_1) при условии, что вторая частица имеет спиновую проекцию m_2 на направление (α_2, β_2) и т. д.

Рассмотрим систему двух частиц со спином $1/2$.

Обобщение соотношения (1.36) на случай системы двух спинов $1/2$ приводит к следующей симметрии спиновой томограммы:

$$\omega(-m_1, -m_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \omega(m_1, m_2, \pi + \alpha_1, \pi - \beta_1, \pi + \alpha_2, \pi - \beta_2).$$

Наряду с томографической энтропией $S(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ для системы двух спинов $1/2$ также может быть введено понятие *томографической информации* $I(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$. Томографическая энтропия и томографическая информация для системы двух спинов была введена в работе [59] с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} S(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &= - \langle \ln \omega(m_1, m_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \rangle = \\ &= - \sum_{m_1, m_2} \omega(m_1, m_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \ln \omega(m_1, m_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2), \quad (1.41) \\ I(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &= S_1(\alpha_2, \beta_2) + S_2(\alpha_1, \beta_1) - S(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2), \end{aligned}$$

где «частичные» томографические энтропии S_1 и S_2 вычисляются по стандартной шенноновской формуле томографических энтропий подсистем, то есть энтропия первого кубита даётся соотношением

$$S_1(\alpha_2, \beta_2) = - \sum_{m_2} \left(\sum_{m_1} (\omega(m_1, m_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)) \ln \sum_{m_1} \omega(m_1, m_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \right),$$

а энтропия второго кубита, соответственно, соотношением

$$S_2(\alpha_1, \beta_1) = - \sum_{m_1} \left(\sum_{m_2} (\omega(m_1, m_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)) \ln \sum_{m_2} \omega(m_1, m_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \right).$$

Далее в Гл. 4 будут подробно рассмотрены графики томографических характеристик (спиновых томограмм, томографических энтропий и томографической информации) некоторых состояний, в том числе с определённой проекцией спина, для частиц со спином $j = 1/2, 1$ и $3/2$, а также для некоторых состояний системы двух спинов $1/2$.

1.7 Запутанность квантовых состояний

В настоящее время в связи с возможностью применения в области квантовых компьютеров, квантовой телепортации, перехватываемых каналов связи и других областях науки и техники представляют большой интерес так называемые *запутанные* состояния в квантовой механике [15], в которых проявляются особые квантовые корреляции между подсистемами.

Двумодовая квантовая система (или система двух спинов) с матрицей плотности ρ называется *сепарабельной*, если существует разложение матрицы плотности на выпуклую сумму прямых (тензорных) произведений каких-либо матриц плотности подсистем:

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k^{(j_1)} \otimes \rho_k^{(j_2)}, \quad (1.42)$$

где числа $p_k \geq 0$ удовлетворяют условию

$$\sum_k p_k = 1.$$

В общем случае набор чисел k произволен. В случае, когда числа k пробегает непрерывный ряд значений сумма в (1.42) понимается как интеграл и определение сепарабельности имеет место для матриц плотности в бесконечномерном пространстве.

Состояние квантовой двумодовой системы (или системы двух спинов) называется *запутанным*, если матрица плотности данного состояния не может быть представлена в виде (1.42).

Ввиду сложности непосредственной проверки соотношения (1.42) и малого количества известных критериев запутанности проблема детектирования запутанных состояний даже на теоретическом уровне представляет существенную трудность.

В частности, известен критерий запутанности для гауссовских состояний, то есть состояний, описываемых функцией Вигнера, являющейся многомерным гауссовским распределением (для простоты рассмотрим двумодовую систему):

$$W(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{\det \sigma}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^{tr} \sigma^{-1} \mathbf{x}}, \quad (1.43)$$

где

$$\mathbf{x} = (q_1, p_1, q_2, p_2)^{tr},$$

а σ есть матрица дисперсий (матрица ковариаций):

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{q_1 q_1} & \sigma_{q_1 p_1} & \sigma_{q_1 q_2} & \sigma_{q_1 p_2} \\ \sigma_{p_1 q_1} & \sigma_{p_1 p_1} & \sigma_{p_1 q_2} & \sigma_{p_1 p_2} \\ \sigma_{q_2 q_1} & \sigma_{q_2 p_1} & \sigma_{q_2 q_2} & \sigma_{q_2 p_2} \\ \sigma_{p_2 q_1} & \sigma_{p_2 p_1} & \sigma_{p_2 q_2} & \sigma_{p_2 p_2} \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Функция Вигнера (1.43) предполагается нормированной согласно условию:

$$\int W(p_1, p_2, q_1, q_2) \frac{dp_1 dp_2 dq_1 dq_2}{(2\pi)^2} = 1. \quad (1.45)$$

Соотношение неопределённостей для двумодового случая приводит к условию положительной определённости матрицы ρ_σ (см. [25, 60]):

$$\rho_\sigma = \sigma + \Sigma \geq 0, \quad (1.46)$$

где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию запутанности гауссовских состояний, найденному в [60], состояние (1.43) является запутанным тогда и только тогда, когда существует $\kappa \in [-1; 1]$, нарушающее положительную определённую матрицы

$$\rho_{\sigma(\kappa)} = \begin{pmatrix} \sigma_{q_1 q_1} & \sigma_{q_1 p_1} + \frac{i}{2} & \sigma_{q_1 q_2} & \frac{1}{\kappa} \sigma_{q_1 p_2} \\ \sigma_{p_1 q_1} - \frac{i}{2} & \sigma_{p_1 p_1} & \sigma_{p_1 q_2} & \frac{1}{\kappa} \sigma_{p_1 p_2} \\ \sigma_{q_2 q_1} & \sigma_{q_2 p_1} & \sigma_{q_2 q_2} & \frac{1}{\kappa} \sigma_{q_2 p_2} + \frac{i}{2} \\ \frac{1}{\kappa} \sigma_{p_2 q_1} & \frac{1}{\kappa} \sigma_{p_2 p_1} & \frac{1}{\kappa} \sigma_{p_2 q_2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{\kappa^2} \sigma_{p_2 p_2} \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

в противном случае состояние (1.43) является сепарабельным. Поскольку первые три главных минора матрицы $\rho_{\sigma(\kappa)}$ совпадают с таковыми в матрице ρ_σ , достаточно проанализировать положительность определителя всей матрицы $\rho_{\sigma(\kappa)}$, который может быть представлен для случая общей матрицы ковариаций (1.44) в виде:

$$\det \rho_{\sigma(\kappa)} = \frac{1}{\kappa^2} \left(\det \sigma - \frac{1}{4} \det \sigma_{22} \right) - \frac{1}{2\kappa} \det \sigma_{12} - \frac{1}{4} \left(\det \sigma_{11} - \frac{1}{4} \right),$$

где

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{q_i q_j} & \sigma_{q_i p_j} \\ \sigma_{p_i q_j} & \sigma_{p_i p_j} \end{pmatrix},$$

а индексы $i, j = 1, 2$.

Для спиновых систем известен критерий сепарабельности Переса-Городецких, полученный в работах [61, 62]. Данный критерий справедлив для системы двух спинов 1/2 и системы двух спинов 1/2 и 1. В соответствии с критерием Переса-Городецких, состояние системы двух частиц со спином 1/2 и матрицей плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

является сепарабельным, если операция частичного транспонирования (ppt-преобразование) переводит матрицу плотности (1.48) в положительно определённую. Матрица, полученная с помощью ppt-преобразования матрицы плотности (1.48) имеет вид

$${}^{ppt} \rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} & \rho_{24} & \rho_{14} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{41} & \rho_{33} & \rho_{43} \\ \rho_{32} & \rho_{42} & \rho_{34} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

соответственно, проверка критерия запутанности сводится к проверке условия ${}^{ppt} \rho \geq 0$.

В следующих главах с помощью указанных критериев будут решены задачи о запутанности квантовых систем в бесконечномерном и конечномерном пространствах состояний. Запутанность в бесконечномерных пространствах состояний будет рассмотрена на примере гауссовских состояний осциллятора с переменной частотой и трением, а также на примере двумерных гауссовских состояний квадратичного гамильтониана, содержащего перекрёстный член с произведением операторов координат (см. Гл. 3). Запутанность в

конечномерных пространствах состояний будет рассмотрена на примере некоторых состояний системы двух спинов $1/2$ (см Гл. 4).

Глава 2

Звёздочное произведение в классической и квантовой механиках

2.1 Взаимосвязь между классическими и квантовыми символами

Физические величины в классической физике называются наблюдаемыми. Соответственно, классические символы физических наблюдаемых являются по своему физическому смыслу «символами физических величин». В свою очередь, квантовая механика оперирует с множеством операторов, не все из которых эрмитовы и соответствуют измеримым физическим величинам. Рассмотрим в качестве примера обычную классическую наблюдаемую - физическую величину, равную произведению координаты и импульса qp . По определению, данная физическая величина является классическим символом Вейля $f_{qp}(q, p) = qp$. В квантовой механике физической величине qp соответствует оператор

$$\frac{\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}}{2}, \quad (2.1)$$

сопоставляемый ей по правилу соответствия Вейля. Согласно сказанному на стр. 17 символ Вейля оператора (2.1) в точности равен классическому символу Вейля произведения координаты и импульса. С другой стороны, квантовомеханическому оператору $\hat{q}\hat{p}$ не соответствует никакой физической величины в классической физике, а, соответственно, и классического символа. Условимся называть символы, соответствующие такого рода операторам просто «символами операторов», чтобы отличать их от «символов физических величин». В частности, символы операторов в координатном представлении в класси-

ческой механике условимся называть «символами физических величин в координатном представлении», а символы операторов в координатном представлении в квантовой механике - просто «символами операторов в координатном представлении». Соответственно, более осмысленно называть ядра звёздочных произведений классических символов «ядрами звёздочных произведений символов физических величин», а ядра звёздочных произведений квантовых символов - «ядрами звёздочных произведений символов операторов». Далее, чтобы не оговаривать каждый раз тождественность квантовых и классических символов для физических (измеримых) величин, будем использовать новую терминологию, иногда приводя в скобках ради удобства восприятия используемые понятия в старой терминологии.

Квантовомеханические операторы $\hat{q}\hat{p}$ и $\hat{p}\hat{q}$ могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}\hat{q}\hat{p} &= \frac{\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}}{2} + \frac{[\hat{q}, \hat{p}]}{2}, \\ \hat{p}\hat{q} &= \frac{\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}}{2} - \frac{[\hat{q}, \hat{p}]}{2}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Операторные соотношения (2.2) можно рассмотреть в координатном представлении, что соответствует изоморфному переходу от квантовомеханических операторов к символам операторов в координатном представлении (матрицам операторов в координатном представлении с точки зрения квантовой механики), но, при этом, в силу линейности и изоморфизма различных звёздочных произведений (см. Гл. 1) соотношения (2.2) будут справедливы для любых символов. В частности, пользуясь выражением для томографического символа единицы (1.29) и учитывая, что коммутатор $[\hat{q}, \hat{p}]$ равен произведению единичного оператора на мнимую единицу (в терминах звёздочного произведения коммутатор $F_q \star F_p - F_p \star F_q = iF_1$, где F_A - символ наблюдаемой A в некоторой схеме звёздочного произведения), в томографическом представлении сразу имеем:

$$\begin{aligned}w_{\hat{q}\hat{p}} &= w_{qp} + \frac{i}{2}w_1, \\ w_{\hat{p}\hat{q}} &= w_{qp} - \frac{i}{2}w_1,\end{aligned}\tag{2.3}$$

что позволяет найти квантовые томографические символы операторов $\hat{q}\hat{p}$ и $\hat{p}\hat{q}$ по символу w_{qp} классической физической величины qp и единичному томографическому символу w_1 . Следует заметить, что данный путь вычисления квантовых томографических символов является более простым по сравнению с прямым методом (1.23). Кроме того, как будет показано далее, ядро звёздочного произведения для томографических символов физических величин проще, чем для операторов. Очевидно, что указанные свойства томографи-

ческих символов справедливы для любых схем звёздочного произведения в квантовой и классической механиках.

Томографические символы операторов (2.3) являются комплексными, в то время как томографические символы, соответствующие физическим величинам: координате, импульсу и произведению их произвольных целых степеней, как будет показано далее, являются вещественными обобщёнными функциями. Ожидается, что данное свойство носит общий характер, т. е. *физическим величинам, и только им, соответствуют вещественные томографические символы.* Для вейлевских символов физических величин указанный критерий вещественности является справедливым.

Пользуясь соответствием наблюдаемой qr квантовомеханическому оператору (2.1) для символа физической величины qr в координатном представлении (т. е. для оператора произведения координаты и импульса в координатном представлении в классической механике) имеем:

$$\langle x | (\hat{q}\hat{p})_{cl} | x' \rangle = -\frac{i}{2}(x' + x) \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x' - x), \quad (2.4)$$

поскольку в квантовой механике

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{q}\hat{p} | x' \rangle &= -ix \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x' - x), \\ \langle x | \hat{p}\hat{q} | x' \rangle &= -ix' \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x' - x). \end{aligned}$$

Как будет показано далее, вычисление символа (2.4) с помощью ядра звёздочного произведения символов физических величин в координатном представлении (для чего требуется найти звёздочное произведение символов физических величин (т. е. матриц операторов этих величин в классической механике в координатном представлении с точки зрения старой терминологии) - координаты q и импульса p в координатном представлении) приводит к такому же результату.

Заметим, что функция Вигнера - вейлевский символ квантовомеханического оператора плотности - может быть отрицательной (например, для первого возбуждённого состояния осциллятора), а, следовательно, не может трактоваться как вейлевский символ состояния в классической механике, т. е. как обычная классическая функция распределения на фазовой плоскости, описывающая состояние в классической механике. Сопоставляя данное утверждение с тем, что символы физических величин в квантовой и классической механиках одни и те же (см. стр. 17), получаем несоответствие функции Вигнера какой-либо физической величине, что находится в соответствии с неизмеримостью состояния в квантовой механике.

Среднее значение физической величины B - функции координаты и импульса $f_B(q, p)$ в квантовой механике в вейлевском представлении может быть найдено как усреднение по функции Вигнера $W(q, p)$ аналогично усреднению по функции распределения на фазовой плоскости в классической механике:

$$\langle B \rangle = \frac{1}{2\pi} \int f_B(q, p) W(q, p) dq dp. \quad (2.5)$$

В свою очередь, стандартное определение среднего от физической величины B , которой соответствует квантовомеханический оператор \hat{B} , в квантовой механике определяется как след от произведения матрицы плотности и оператора \hat{B} , что эквивалентно определению (2.5). С другой стороны, соотношение (2.5) с точки зрения звёздочного произведения может быть проинтерпретировано как усреднение поточечного произведения (квантового) символа Вейля $f_B(q, p)$ физической величины B с вейлевским символом оператора плотности квантовомеханического состояния - функцией Вигнера $W(q, p)$. Однако, как было отмечено, поточечное произведение вейлевских символов соответствует «классичности» рассматриваемой механики, поскольку именно в вейлевском представлении звёздочное произведение (классических) символов физических величин коммутативно и поточечно. В силу изоморфизма различных представлений звёздочного произведения в квантовой механике, данное утверждение является справедливым в любой схеме звёздочного произведения. Действительно, рассмотрев пример звёздочного произведения классических символов физических величин в координатном представлении с ядром (1.21), которое в проинтегрированном виде может быть представлено как

$$K = 4\delta(x_1 + x_2 - x - x')\delta(x'_1 + x'_2 - x - x')\delta(x + 3x' - 2(x_2 + x'_2)), \quad (2.6)$$

можно убедиться, что вычисление следа от произведения (классических) символов физических величин в координатном представлении с помощью (классического) ядра (2.6) приводит к такому же результату как и с помощью (квантового) ядра (1.18) для этих же символов. Таким образом, интересуясь только средними от физических величин в квантовой механике, достаточно рассматривать только (классические) ядра звёздочных произведений физических величин.

Учитывая возможность вычисления средних от физических величин в квантовой механике с помощью ядра звёздочного произведения (классических) символов физических величин и возможность находить некоторые (квантовые) символы операторов с помощью символов физических величин, вычисление которых является технически более простым,

представляет интерес явный вид (классических) томографических символов простейших физических величин, а также ядро их звёздочного произведения, полученные в следующих параграфах (также см. [29]).

2.2 Простейшие томографические символы

Томографические символы физических величин - координаты q и импульса p , найденные с помощью соотношений (1.28) (см. подробности, связанные с вычислением интегралов в математических дополнениях к этой главе) имеют вид [29]:

$$\begin{aligned}
 w_q(X, \mu, \nu) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int q e^{ik(X-\mu q-\nu p)} dq dp dk \\
 &= i\delta'(\mu)\delta(\nu) \int \frac{e^{ikX}}{k^3} dk = \frac{\pi}{2} X |X| \delta'(\mu)\delta(\nu), \\
 w_p(X, \mu, \nu) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int p e^{ik(X-\mu q-\nu p)} dq dp dk \\
 &= i\delta(\mu)\delta'(\nu) \int \frac{e^{ikX}}{k^3} dk = \frac{\pi}{2} X |X| \delta(\mu)\delta'(\nu).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Следует заметить, что наряду с найденными томографическими символами (2.7) существуют и другие обобщённые функции, позволяющие формально перейти к вейлевским символам q и p с помощью второй формулы соотношений (1.28). В частности, функция $-2\pi i\delta'(\mu)\delta(\nu)\delta(X)$ позволяет перейти к вейлевскому символу q с помощью второго из соотношений (1.28), однако, она не является томографическим символом координаты, поскольку не обладает свойством однородности степени -1 как любой томографический символ (см. соотношение (1.24)).

Аналогично, томографический символ физической величины qp , полученный переходом от вейлевского символа qp с помощью первого из соотношений соотношений (1.28) имеет вид (см. мат. дополнения к этой главе) [29]:

$$\begin{aligned}
 w_{qp}(X, \mu, \nu) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int qp e^{ik(X-\mu q-\nu p)} dq dp dk \\
 &= -\delta'(\mu)\delta'(\nu) \int \frac{e^{ikX}}{k^4} dk = -\frac{\pi}{6} X^2 |X| \delta'(\mu)\delta'(\nu).
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Очевидно, что $w_{qp}(X, \mu, \nu) = w_{pq}(X, \mu, \nu)$ в силу коммутативности (классических) ядер звёздочного произведения символов физических величин. Заметим, что используя вейлевские символы операторов $\hat{q}\hat{p}$ и $\hat{p}\hat{q}$ (которые могут быть вычислены с помощью звёздочного

произведения вейлевских символов координаты и импульса с операторным ядром (1.19)) в качестве функции $F(q, p)$ в соотношениях (1.28) можно получить томографические символы данных операторов. Однако, вследствие изоморфизма и симметричных свойств, с учётом соотношений (2.3), (2.8) и (1.29) ответ очевиден [29]:

$$\begin{aligned} w_{\hat{q}\hat{p}} &= -\frac{\pi}{6} X^2 |X| \delta'(\mu) \delta'(\nu) - i \frac{\pi}{2} |X| \delta(\mu) \delta(\nu), \\ w_{\hat{p}\hat{q}} &= -\frac{\pi}{6} X^2 |X| \delta'(\mu) \delta'(\nu) + i \frac{\pi}{2} |X| \delta(\mu) \delta(\nu). \end{aligned}$$

Вычислим томографические символы, соответствующие физическим величинам - произведениям произвольных целых степеней координаты q и импульса p . Ввиду соотношений

$$\begin{aligned} \int k^n e^{-ik\alpha} dk &= 2\pi i^n \delta^{(n)}(\alpha), \\ \int q^n e^{-ik\mu q} dq &= \frac{1}{k^n |k|} 2\pi i^n \delta^{(n)}(\mu), \end{aligned}$$

для $n, m = 0, 1, 2, \dots$ может быть получено выражение

$$w_{q^n p^m}(X, \mu, \nu) = \pi \frac{(-X)^{n+m+1}}{(n+m+1)!} \text{sign}(X) \delta^{(n)}(\mu) \delta^{(m)}(\nu).$$

Аналогично, для отрицательных степеней координаты q и импульса p может быть найдено:

$$w_{q^{-n} p^{-m}}(X, \mu, \nu) = -\frac{\pi}{2} \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\nu^{m-1}}{(m-1)!} \text{sign}(\mu) \text{sign}(\nu) \delta^{(n+m-2)}(X),$$

где $n, m = 1, 2, \dots$. В частности, для томографического символа $(1/qp)$ имеем:

$$w_{(qp)^{-1}}(X, \mu, \nu) = -\frac{\pi}{2} \text{sign}(\mu) \text{sign}(\nu) \delta(X).$$

Для отрицательных степеней q ($n = 1, 2, \dots$) и положительных степеней p ($m = 0, 1, 2, \dots$) получаем результат:

$$w_{q^{-n} p^m}(X, \mu, \nu) = -\pi \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} \text{sign}(\mu) \delta^{(m)}(\nu) \delta^{(n-m-2)}(X) \quad (2.9)$$

если $n - m \geq 2$, и

$$w_{q^{-n} p^m}(X, \mu, \nu) = \frac{\pi}{2} (-1)^{n+m+1} \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} \frac{X^{m-n+1}}{(m-n+1)!} \text{sign}(\mu) \text{sign}(X) \delta^{(m)}(\nu) \quad (2.10)$$

если $n - m < 2$.

Для нахождения символа $w_{q^n p^{-m}}(X, \mu, \nu)$ по символу $w_{q^{-n} p^m}(X, \mu, \nu)$ требуется сделать следующую замену в формулах (2.9) и (2.10): $n \leftrightarrow m$ и $\nu \leftrightarrow \mu$, что приводит к результату:

$$w_{q^n p^{-m}}(X, \mu, \nu) = -\pi \frac{\nu^{m-1}}{(m-1)!} \text{sign}(\nu) \delta^{(n)}(\mu) \delta^{(m-n-2)}(X)$$

если $m - n \geq 2$, и

$$w_{q^n p^{-m}}(X, \mu, \nu) = \frac{\pi}{2} (-1)^{n+m+1} \frac{\nu^{m-1}}{(m-1)!} \frac{X^{n-m+1}}{(n-m+1)!} \text{sign}(\nu) \text{sign}(X) \delta^{(n)}(\mu)$$

если $m - n < 2$.

В частности, для томографических символов отношения координаты и импульса имеют:

$$\begin{aligned} w_{\frac{q}{p}}(X, \mu, \nu) &= -\frac{\pi}{2} X \text{sign}(X) \text{sign}(\nu) \delta'(\mu), \\ w_{\frac{p}{q}}(X, \mu, \nu) &= -\frac{\pi}{2} X \text{sign}(X) \text{sign}(\mu) \delta'(\nu). \end{aligned}$$

2.3 Ядро звёздочного произведения томографических символов физических величин

Ядро звёздочного произведения $K(X, \mu, \nu, X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2)$ двух томографических символов физических величин (классических томографических символов) $w_1(X_1, \mu_1, \nu_1)$ и $w_2(X_2, \mu_2, \nu_2)$ было определено в работе [25] как

$$\begin{aligned} w(X, \mu, \nu) &= \int K(X, \mu, \nu, X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) w_1(X_1, \mu_1, \nu_1) \\ &\quad \times w_2(X_2, \mu_2, \nu_2) dX_1 d\mu_1 d\nu_1 dX_2 d\mu_2 d\nu_2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где, по определению,

$$w(X, \mu, \nu) = w_1(X, \mu, \nu) * w_2(X, \mu, \nu).$$

Для нахождения явного вида ядра $K(X, \mu, \nu, X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2)$ звёздочного произведения томографических символов физических величин подставим в определение томографического символа (1.28) поточечное произведение функций $A(q, p)$ и $B(q, p)$ - символов Вейля физических величин, а затем выразим данные функции через их томографические символы. Полученное (коммутативное) ядро звёздочного произведения томографических символов физических величин имеет вид:

$$K(X, \mu, \nu, X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i(X_1+X_2-X(\nu_1+\nu_2)/\nu)} \delta\left(\nu(\mu_1+\mu_2) - \mu(\nu_1+\nu_2)\right). \quad (2.12)$$

Данное ядро легко может быть обобщено на многомерный случай:

$$\begin{aligned} &K\left(X_1, \dots, X_N, \mu_1, \dots, \mu_N, \nu_1, \dots, \nu_N, X_{11}, \dots, X_{1N}, \mu_{11}, \dots, \mu_{1N}, \nu_{11}, \dots, \nu_{1N}, \right. \\ &X_{21}, \dots, X_{2N}, \mu_{21}, \dots, \mu_{2N}, \nu_{21}, \dots, \nu_{2N}\left.) = \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \prod_{k=1}^N \exp\left\{i\left(X_{1k} + X_{2k} - X_k \frac{\nu_{1k} + \nu_{2k}}{\nu_k}\right)\right\} \right. \\ &\quad \times \delta\left(\nu_k(\mu_{1k} + \mu_{2k}) - \mu_k(\nu_{1k} + \nu_{2k})\right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где ν_k, ν_{1k} и ν_{2k} - компоненты соответствующих векторов в N -мерном пространстве.

По аналогии может быть найдено ядро звёздочного произведения томографических символов операторов (квантовых томографических символов) [39], если рассмотреть функции $W_A(q, p)$ и $W_B(q, p)$ как обычные вейлевские символы операторов A и B (квантовые вейлевские символы) с некоммутативным звёздочным произведением, описываемым ядром (1.19). Связь между ядрами звёздочного произведения для томографических символов физических величин и операторов (для классических томографических символов и квантовых) даётся соотношением:

$$K_{\text{quant}}(X, \mu, \nu, X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) = K_{\text{classic}}(X, \mu, \nu, X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) e^{i(\mu_2\nu_1 - \mu_1\nu_2)/2}.$$

Томографический символ физической величины - произведения координаты и импульса qp (2.8) также может быть найден с помощью ядра (2.12): вычисляя интеграл (2.11) для данного случая с учётом томографических символов координаты и импульса (2.7), имеем (см. подробности об интегрировании в математических дополнениях к данной главе):

$$\begin{aligned} (w_q * w_p)(X, \mu, \nu) &= (w_p * w_q)(X, \mu, \nu) \\ &= \frac{1}{16} \left(\int e^{iX} X |X| dX \right)^2 e^{-iX\nu_2/\nu} \delta(\mu\nu_2 - \nu\mu_1) \delta'(\mu_1) \delta'(\nu_2) d\mu_1 d\nu_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{|\nu|} e^{-iX\nu_2/\nu} e^{ik_1\mu\nu_2/\nu} e^{ik_2\nu_2} k_1 k_2 d\nu_2 dk_1 dk_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int k_1 k_2 \delta(X - \mu k_1 - \nu k_2) dk_1 dk_2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Производя замену переменных $k_1 \rightarrow q$ и $k_2 \rightarrow p$ получаем результат, совпадающий с найденным ранее (см. (2.8)). Таким образом, вычисление звёздочного произведения томографических символов координаты q и импульса p сводится к определению томографического символа физической величины - произведения координаты и импульса qp .

В силу коммутативности звёздочного произведения символов физических величин квантовомеханическое соотношение неопределённостей в классическом пределе имеет вид:

$$w_q * w_p - w_p * w_q = 0.$$

Соотношение неопределённостей в квантовой механике - коммутатор - с помощью (некоммутативного) ядра для звёздочного произведения томографических символов операторов записывается в виде:

$$w_q * w_p - w_p * w_q = iw_1,$$

Отличие данных двух последних соотношений состоит в использовании разных ядер звёздочных произведений для *одних и тех же символов физических величин*: с точки зрения ядра звёздочного произведения в первом случае данные символы (w_p и w_q) *формально* рассматриваются как символы физических величин, а во втором - как символы операторов.

2.4 Математические дополнения

Приведём некоторые соотношения для обобщённых функций [63], использованные в данной работе для вычисления томографических символов.

Рассмотрим интегралы вида $\int \frac{e^{ikx}}{k^n} dk$, где n - натуральное число, а интегрирование осуществляется по всей вещественной оси. Данные интегралы были рассмотрены в [63], где они трактовались как производная порядка n от обобщённой функции $\frac{1}{x}$. Обобщённая функция $\frac{1}{x}$ определяется по своему действию на обычную функцию $f(x)$ как

$$\left(\frac{1}{x}, f(x)\right) = \text{v.p.} \int \frac{f(x)}{x} dx.$$

Соответственно, применяя правило дифференцирования обобщённых функций можно получить, что

$$\int \frac{e^{ikx}}{k^n} dk = \pi i^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \text{sign}(x). \quad (2.15)$$

Согласно [63] также имеем

$$\int e^{ix} |x| dx = -2,$$

$$\int e^{ix} x |x| dx = -4i.$$

Глава 3

Запутанные гауссовские состояния двумерного квантового осциллятора с переменной частотой

В данной главе с помощью метода симплектической томографии и критерия запутанности гауссовских состояний [60] будет решена задача об эволюции запутанности некоторых гауссовских состояний двумерного квантового осциллятора с переменной частотой и трением, а также эволюция запутанности некоторых гауссовских состояний двумерного квадратичного гамильтониана, содержащего перекрёстный член с произведением операторов координат составляющих подсистем. Указанная задача представляет интерес в квантовой оптике в связи с таким физическим явлением, как нестационарный эффект Казимира (см. работы [19], [20], [21], [23]), связанный с генерацией сжатого света полостью резонатора с движущимися границами [20]. Впервые уравнение Шредингера для рассматриваемой системы - осциллятора с переменной частотой - было решено Хусими [64]. Трение в квантовой механике может быть учтено с помощью специфических гамильтонианов, зависящих от времени (см. [65], [66]), что будет использоваться в данной работе для описания трения в квантовых системах.

3.1 Гамильтониан Калдиrolа-Канаи и гауссовские состояния

Рассмотрим квантовую систему с гамильтонианом Калдиrolа-Канаи (в данной работе везде полагаем $\hbar, m = 1$)

$$\hat{H} = \frac{1}{2}e^{-\gamma t} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2}e^{\gamma t}\omega^2(t) (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2), \quad (3.1)$$

соответствующим классическому двумерному осциллятору с трением и переменной частотой в классической механике, если операторы в (3.1) формально рассматривать как классические наблюдаемые. Полагая операторы в (3.1) классическими наблюдаемыми и применяя канонические уравнения Гамильтона можно показать, что обобщённые координаты данной классической системы будут удовлетворять классическим уравнениям движения для осциллятора:

$$\ddot{q}_n + \gamma\dot{q}_n + \omega^2(t)q_n = 0, \quad n = 1, 2.$$

Исследуем эволюцию запутанности рассматриваемой системы с гамильтонианом (3.1) на примере двух начальных условий в нулевой момент времени, соответствующих нахождению системы в гауссовском состоянии (1.43): рассмотрим случай, когда квантовая система в начальный момент времени находилась в когерентном состоянии осциллятора и случай, когда в начальный момент времени волновая функция системы имела вид

$$\Psi(q_1, q_2) = Ne^{-Aq_1^2 - Bq_2^2 + Cq_1q_2}, \quad (3.2)$$

где A, B и C - некоторые постоянные, а N - коэффициент нормировки. Первое условие соответствует нахождению системы в сепарабельном состоянии в начальный момент времени, а второе условие - в запутанном состоянии. Отличие данных начальных условий также состоит в виде выражения под экспонентой волновых функций: в когерентном состоянии присутствуют линейные члены, но нет перекрёстных, и наоборот: в экспоненте волновой функции (3.2) присутствуют перекрёстные члены, но отсутствуют линейные.

3.2 Пропагатор в томографическом представлении

Найдём квантовые интегралы движения, зависящие от времени явно, и удовлетворяющие уравнению:

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial t} + i [\hat{H}(t), \hat{I}] = 0. \quad (3.3)$$

Подставим вместо \hat{I} в соотношение (3.3) операторы

$$\begin{aligned}\hat{p}_{j_0}(t) &= a_{p_j}(t)\hat{q}_j + b_{p_j}(t)\hat{p}_j, \\ \hat{q}_{j_0}(t) &= a_{q_j}(t)\hat{q}_j + b_{q_j}(t)\hat{p}_j,\end{aligned}\tag{3.4}$$

где $a_{q_j}(t), b_{q_j}(t), a_{p_j}(t)$ и $b_{p_j}(t)$, $j = 1, 2$ - произвольные функции, зависящие от времени.

Операторы (3.4) удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned}\hat{p}_{j_0}(0) &= \hat{p}_j, \\ \hat{q}_{j_0}(0) &= \hat{q}_j.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Решение дифференциального уравнения (3.3) для функций (3.4) с учётом начальных условий (3.5) приводит к результату:

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_{1_0}(t) \\ \hat{p}_{1_0}(t) \\ \hat{q}_{2_0}(t) \\ \hat{p}_{2_0}(t) \end{pmatrix} = \Lambda(t) \begin{pmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{p}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix},\tag{3.6}$$

где $\Lambda(t)$ -матрица имеет вид:

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} -e^{\gamma t}\dot{\varepsilon}_{-1} & \varepsilon_{-1} & 0 & 0 \\ -e^{\gamma t}\dot{\varepsilon}_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{\gamma t}\dot{\varepsilon}_{-1} & \varepsilon_{-1} \\ 0 & 0 & -e^{\gamma t}\dot{\varepsilon}_1 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}.\tag{3.7}$$

В $\Lambda(t)$ -матрице через $\varepsilon_j = \varepsilon_j(t)$, $j = 1, -1$ обозначены решения классического уравнения для осциллятора

$$\ddot{\varepsilon}_j + \gamma\dot{\varepsilon}_j + \omega^2(t)\varepsilon_j = 0\tag{3.8}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(0) &= 1, & \varepsilon_{-1}(0) &= 0, \\ \dot{\varepsilon}_1(0) &= 0, & \dot{\varepsilon}_{-1}(0) &= -1.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Функция $\varepsilon_1(t)$ является безразмерной, в то время как $\varepsilon_{-1}(t)$ имеет размерность времени. В частности, в случае осциллятора с постоянной с постоянной частотой ($\omega(t) = \omega_0 = const.$)

функции ε_1 и ε_{-1} имеют вид:

$$\varepsilon_1(t) = e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \left(\cos \left(t \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} \right) + \frac{1}{\sqrt{4 \left(\frac{\omega_0}{\gamma} \right)^2 - 1}} \sin \left(t \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} \right) \right), \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{-1}(t) = -\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\gamma^2}} e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \sin \left(t \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} \right). \quad (3.11)$$

Следует заметить, что уравнение движения для осциллятора (3.8) приводит к следующей связи между функциями ε_1 и ε_{-1} :

$$\dot{\varepsilon}_1 \varepsilon_{-1} - \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_{-1} = e^{-\gamma t}, \quad (3.12)$$

что находится в соответствии с унимодулярностью матрицы $\Lambda(t)$ ($\det \Lambda(t) = 1$) в общем случае [67].

Пропагатор в координатном представлении - функция Грина - может быть выражен через интегралы движения для систем с квадратичными гамильтонианами [67]. Данное утверждение справедливо и для пропагатора квадратичных систем в томографическом представлении, который был найден в [57] и может быть представлен в виде:

$$\Pi(\mathbf{X}, \mu, \nu, \mathbf{X}', \mu', \nu', t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \prod_{j=1}^2 e^{i \left(X'_j - \frac{\mu'_j}{\mu_j} X_j \right)} \delta(\nu'_j \mu_j - \nu_j \mu'_j), \quad (3.13)$$

где

$$\begin{pmatrix} \mu''_1 \\ \nu''_1 \\ \mu''_2 \\ \nu''_2 \end{pmatrix} = \Lambda^{tr}(t) \begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \nu'_1 \\ \mu'_2 \\ \nu'_2 \end{pmatrix}.$$

В общем случае эволюция во времени томограммы начального состояния $w(\mathbf{X}', \mu', \nu', 0)$ может быть записана с помощью пропагатора (1.33), где условимся использовать следующие обозначения в силу двумерности решаемой задачи:

$$\begin{aligned} \nu &= (\nu_1, \nu_2)^{tr}, & \mu &= (\mu_1, \mu_2)^{tr}, \\ \nu' &= (\nu'_1, \nu'_2)^{tr}, & \mu' &= (\mu'_1, \mu'_2)^{tr}, \\ \mathbf{X} &= (X_1, X_2)^{tr}, & \mathbf{X}' &= (X'_1, X'_2)^{tr}. \end{aligned}$$

С учётом полученного для $\Lambda(t)$ -матрицы выражения (3.7) для пропагатора в томографическом представлении в системе с гамильтонианом (3.1) получаем:

$$\begin{aligned} &\Pi(\mathbf{X}, \mu, \nu, \mathbf{X}', \mu', \nu', t) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \prod_{j=1}^2 \exp \left(i \left(X'_j + \frac{1}{\mu_j} e^{\gamma t} \left(\dot{\varepsilon}_{-1} \mu'_j + \dot{\varepsilon}_1 \nu'_j \right) X_j \right) \right) \delta \left(\mu'_j \left(\varepsilon_{-1} \mu_j + e^{\gamma t} \dot{\varepsilon}_{-1} \nu_j \right) + \nu'_j \left(\varepsilon_1 \mu_j + e^{\gamma t} \dot{\varepsilon}_1 \nu_j \right) \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Как следует из полученного соотношения, пропагатор для рассматриваемой системы полностью факторизуется на произведение двух функций, каждая из которых описывает эволюцию только одной из мод, эволюционирующих во времени как одномерный квантовый осциллятор.

3.3 Эволюция изначально сепарабельного состояния

Рассмотрим эволюцию запутанности изначально сепарабельного состояния на примере когерентного состояния осциллятора $|\alpha\rangle$, которое может быть получено из основного $|0\rangle$ с помощью оператора сдвига $\hat{D}(\alpha)$ [67]:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (3.15)$$

где

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{A}^+ - \alpha^*\hat{A}},$$

α - некоторое комплексное число, а \hat{A} - оператор уничтожения для осциллятора с постоянной частотой. В силу двумодовости рассматриваемой системы оператор \hat{A} и параметр α являются векторами:

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{q}_1 + i\hat{p}_1 \\ \hat{q}_2 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Проведя вычисления, получаем оператор сдвига, выраженный через операторы координаты и импульса в виде:

$$\hat{D}(\alpha) = \hat{D}_1(\alpha_1)\hat{D}_2(\alpha_2), \quad (3.16)$$

где

$$\hat{D}_j(\alpha_j) = \prod_{j=1}^2 e^{i\sqrt{2}(\text{Im } \alpha_j \hat{q}_j - \text{Re } \alpha_j \hat{p}_j)}.$$

С учётом соотношения (3.15) оператор плотности когерентного состояния может быть записан в форме

$$\hat{\rho}_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{D}(\alpha)\hat{\rho}_0\hat{D}^\dagger(\alpha), \quad (3.17)$$

где $\hat{\rho}_0$ - оператор плотности основного состояния:

$$\hat{\rho}_0 = |0\rangle\langle 0|.$$

Симплектическая томограмма двумодового когерентного состояния может быть найдена как томографический символ оператора (3.17):

$$w_\alpha = \text{Tr} \left(\hat{D}(\alpha) \hat{\rho}_0 \hat{D}^\dagger(\alpha) \delta(X_1 - \mu_1 \hat{q}_1 - \nu_1 \hat{p}_1) \delta(X_2 - \mu_2 \hat{q}_2 - \nu_2 \hat{p}_2) \right).$$

Подставляя в данное выражение соотношение (3.16), получаем:

$$w_\alpha = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_0 \hat{D}_1^\dagger \delta(X_1 - \mu_1 \hat{q}_1 - \nu_1 \hat{p}_1) \hat{D}_1 \hat{D}_2^\dagger \delta(X_2 - \mu_2 \hat{q}_2 - \nu_2 \hat{p}_2) \hat{D}_2 \right), \quad (3.18)$$

где опущены аргументы у операторов $\hat{D}_i(\alpha)$, $\hat{D}_i^\dagger(\alpha)$ и томограммы w_α .

Вычисление соотношения (3.18) приводит к следующему виду томографического распределения вероятности (томограммы):

$$w_\alpha(\mathbf{X}, \mu, \nu) = w_{\alpha_1}(X_1, \mu_1, \nu_1) w_{\alpha_2}(X_2, \mu_2, \nu_2), \quad (3.19)$$

где томограммы каждой из мод $w_{\alpha_j}(X_j, \mu_j, \nu_j)$, $j = 1, 2$ являются гауссовскими функциями распределения

$$w_{\alpha_j}(X_j, \mu_j, \nu_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{X_j}^2(\mu_j, \nu_j)}} e^{-\frac{(X_j - \bar{X}_j)^2}{2\sigma_{X_j}^2(\mu_j, \nu_j)}} \quad (3.20)$$

со средними \bar{X}_j и дисперсиями $\sigma_{X_j}^2(\mu_j, \nu_j)$, имеющими вид:

$$\sigma_{X_j}^2(\mu_j, \nu_j) = \frac{\mu_j^2}{2} + \frac{\nu_j^2}{2}, \quad (3.21)$$

$$\bar{X}_j = \sqrt{2}(\text{Im } \alpha_j \nu_j + \text{Re } \alpha_j \mu_j). \quad (3.22)$$

(Суммирование по повторяющимся индексам j в вышеприведённых соотношениях не производится).

Томограмма $w(X_0, \mu_0, \nu_0)$ в одномерном случае является функцией распределения координаты [11, 12]

$$X_0 = \mu_0 q_0 + \nu_0 p_0, \quad (3.23)$$

дисперсия которой в терминах вариаций и ковариаций координаты и импульса выражается как

$$\sigma_{X_0}^2(\mu_0, \nu_0) = \mu_0^2 \sigma_{q_0 q_0} + \nu_0^2 \sigma_{p_0 p_0} + 2\mu_0 \nu_0 \sigma_{q_0 p_0}. \quad (3.24)$$

Применяя данный результат к рассматриваемой задаче получаем соответствие соотношения (3.21) дисперсионной матрице

$$\sigma_{jj} = \begin{pmatrix} \sigma_{q_j q_j} & \sigma_{q_j p_j} \\ \sigma_{p_j q_j} & \sigma_{p_j p_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Заметим, что найденная дисперсионная матрица по своему физическому смыслу действительно соответствует когерентному состоянию.

Эволюция когерентного состояния осциллятора (3.19) может быть получена с помощью соотношений (1.33) и (3.14):

$$w_\alpha(\mathbf{X}, \mu, \nu, t) = w_{\alpha_1}(X_1, \mu_1, \nu_1, t)w_{\alpha_2}(X_2, \mu_2, \nu_2, t), \quad (3.26)$$

где томограммы каждой из мод $w_{\alpha_j}(X_j, \mu_j, \nu_j, t)$, $j = 1, 2$ остаются гауссовскими функциями при эволюции системы, но с уже меняющимися дисперсиями:

$$\begin{aligned} \bar{X}_j(t) &= \sqrt{2} (e^{\gamma t}(\dot{\varepsilon}_1 \operatorname{Re} \alpha_j - \dot{\varepsilon}_{-1} \operatorname{Im} \alpha_j)\nu_j + (\varepsilon_1 \operatorname{Re} \alpha_j - \varepsilon_{-1} \operatorname{Im} \alpha_j)\mu_j), \\ \sigma_{jj}(t) &= \begin{pmatrix} \sigma_{q_j q_j}(t) & \sigma_{q_j p_j}(t) \\ \sigma_{p_j q_j}(t) & \sigma_{p_j p_j}(t) \end{pmatrix} = S_+(1, 1, 1, 1, \varepsilon_1, \varepsilon_{-1}), \end{aligned}$$

где через S_+ обозначена одна из двух матриц, определяемых по правилу:

$$S_{+,-}(K_1, K_2, R, F, a_+, a_-) = \frac{1}{2}K_1 \begin{pmatrix} K_2 F a_+^2 \pm R a_-^2 & e^{\gamma t}(K_2 F a_+ \dot{a}_+ \pm R a_- \dot{a}_-) \\ e^{\gamma t}(K_2 F a_+ \dot{a}_+ \pm R a_- \dot{a}_-) & e^{2\gamma t}(K_2 F \dot{a}_+^2 \pm R \dot{a}_-^2) \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Рассмотренная задача об эволюции квантового осциллятора, находившегося в начальный момент времени в когерентном (сепарабельном) состоянии, показывает, что томографическое распределение вероятности (томограмма) данной системы $w_\alpha(\mathbf{X}, \mu, \nu, t)$ распадается на произведение томограмм $w_{\alpha_j}(X_j, \mu_j, \nu_j, t)$, $j = 1, 2$ каждой из мод системы в любой момент времени. Данное свойство соответствует тому, что изначально сепарабельное состояние двумерного осциллятора - когерентное состояние - в результате эволюции в системе с гамильтонианом (3.1) во все моменты времени остаётся сепарабельным.

3.4 Эволюция изначально запутанного гауссовского состояния

Рассмотрим случай, когда квантовая система находилась в начальный момент времени в чистом запутанном гауссовском состоянии, нормированная волновая функция которого имеет вид:

$$\Psi_0(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{G}}} e^{-Aq_1^2 - Bq_2^2 + Cq_1q_2}, \quad (3.28)$$

где A и B - вещественные положительные числа, а $G = (4AB - C^2)^{-1}$. Требование нормированности квантового состояния (3.28) налагает дополнительное условие на число C :

$$C^2 > 4AB.$$

В двумерном случае функция Вигнера может быть найдена по волновой функции состояния с помощью соотношения [3]

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int \rho\left(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{u}}{2}, \mathbf{q} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{u}} d\mathbf{u},$$

где матрица плотности

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \Psi(\mathbf{q})\Psi^*(\mathbf{q}'),$$

причём

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2)^{tr}, \quad \mathbf{q}' = (q'_1, q'_2)^{tr}.$$

Применяя данную формулу, получаем функцию Вигнера для состояния (3.28), являющуюся нормированной согласно условию (1.45) гауссовской функцией (1.43) с матрицей дисперсий (1.44), даваемой формулой:

$$\sigma = \begin{pmatrix} BG & 0 & \frac{1}{2}GC & 0 \\ 0 & A & 0 & -\frac{1}{2}C \\ \frac{1}{2}GC & 0 & AG & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}C & 0 & B \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Главные миноры матрицы (3.29) имеют вид:

$$\begin{aligned} \det_{(1)} \sigma &= GB, \\ \det_{(2)} \sigma &= GAB, \\ \det_{(3)} \sigma &= \frac{1}{4}GA, \\ \det_{(4)} \sigma &= \det \sigma = \frac{1}{16}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

что соответствует положительной опеределённости дисперсионной матрицы: все главные миноры являются положительными числами в силу положительности чисел A и B .

Главные миноры матрицы ρ_σ (см. (1.46)) в случае матрицы дисперсий (3.29) также являются неотрицательными числами:

$$\begin{aligned} \det_{(1)} \rho_\sigma &= GB, \\ \det_{(2)} \rho_\sigma &= \frac{1}{4}GC^2, \\ \det_{(3)} \rho_\sigma &= 0, \\ \det_{(4)} \rho_\sigma &= \det \rho_\sigma = 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

что соответствует выполнению соотношения неопределённостей. Равенство нулю последнего из соотношений (3.31) свидетельствует о минимизации соотношения неопределённостей, следующей из гауссовской формы рассматриваемого состояния.

Исследуем на запутанность начальное состояние (3.28) с помощью критерия запутанности для гауссовских состояний, изложенного на стр. 29. Для рассматриваемой матрицы дисперсий (3.29) имеем (см. соотношение (1.47)):

$$\det \rho_{\sigma(\kappa)} = -\frac{1}{16}GC^2 \frac{(1-\kappa)^2}{\kappa^2}. \quad (3.32)$$

Качественный график функции $y(\kappa) = \det \rho_{\sigma(\kappa)}$ представлен на Рис. 3.1. Из полученного соотношения видим, что $\det \rho_{\sigma(\kappa)} \leq 0$, что свидетельствует о запутанности состояния (3.28). Следует заметить, что случай эволюции из сепарабельного состояния (3.15) мог бы так же формально быть исследован на запутанность с помощью данного критерия (см. стр. 29).

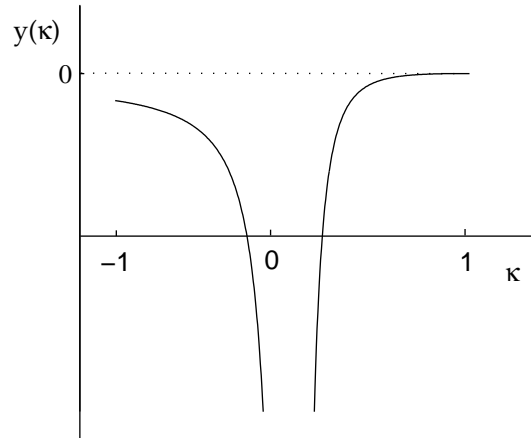


Рис. 3.1: График отрицательной функции $y(\kappa) = \det \rho_{\sigma(\kappa)}$, показывающий запутанность гауссовского состояния.

Для нахождения эволюции квантового состояния через пропагатор (1.33) найдём томограмму начального состояния. Томограмма для состояния (3.28) может быть получена непосредственно из матрицы плотности, как это было сделано в предыдущем параграфе, однако, нахождение томограммы с помощью функции Вигнера (1.43) является технически более простым:

$$w(\mathbf{X}, \mu, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int W(p_1, p_2, q_1, q_2) e^{-ik_1(X_1 - \mu_1 q_1 - \nu_1 p_1)} e^{-ik_2(X_2 - \mu_2 q_2 - \nu_2 p_2)} dk_1 dk_2 dq_1 dq_2 dp_1 dp_2.$$

Интегрируя вышеприведённое соотношение, получаем томограмму начального состояния

- двумерное гауссовское распределение

$$w(\mathbf{X}, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \sigma_{\mathbf{X}}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{X}^{tr}\sigma_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{X}} \quad (3.33)$$

с дисперсионной матрицей

$$\sigma_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} GB\mu_1^2 + A\nu_1^2 & \frac{1}{2}C(G\mu_1\mu_2 - \nu_1\nu_2) \\ \frac{1}{2}C(G\mu_1\mu_2 - \nu_1\nu_2) & GA\mu_2^2 + B\nu_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Приведём мнемоническое правило нахождения дисперсионной матрицы (1.44) непосредственно из томограммы (3.33) (см. доказательство в [25]). Рассмотрим $\sigma_{\mathbf{X}}$ как функцию μ и ν :

$$\sigma_{\mathbf{X}}(\mu, \nu) = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1X_1}(\mu_1, \nu_1) & \sigma_{X_1X_2}(\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) \\ \sigma_{X_1X_2}(\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) & \sigma_{X_2X_2}(\mu_2, \nu_2) \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

По аналогии с (3.23) и (3.24) имеем:

$$\begin{aligned} X_j &= \mu_j q_j + \nu_j p_j, \\ X_j^2 &= \mu_j^2 q_j^2 + \nu_j^2 p_j^2 + 2\mu_j \nu_j q_j p_j, \\ \sigma_{X_j^2}(\mu_j, \nu_j) &\equiv \sigma_{X_j X_j}(\mu_j, \nu_j) = \mu_j^2 \sigma_{q_j q_j} + \nu_j^2 \sigma_{p_j p_j} + 2\mu_j \nu_j \sigma_{q_j p_j}, \end{aligned}$$

где $j = 1, 2$. Для недиагональных членов (симметричной) матрицы дисперсий $\sigma_{\mathbf{X}}(\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2)$ получаем:

$$\begin{aligned} X_1 X_2 &= \mu_1 \mu_2 q_1 q_2 + \nu_1 \nu_2 p_1 p_2 + \mu_1 \nu_2 q_1 p_2 + \mu_2 \nu_1 q_2 p_1, \\ \sigma_{X_1 X_2}(\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) &= \sigma_{X_2 X_1}(\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) = \mu_1 \mu_2 \sigma_{q_1 q_2} + \nu_1 \nu_2 \sigma_{p_1 p_2} + \mu_1 \nu_2 \sigma_{q_1 p_2} + \mu_2 \nu_1 \sigma_{q_2 p_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, по известной матрице (3.35) может быть найдена матрица дисперсий (1.44) в виде:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma_{jj} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_j X_j}(1, 0) & \frac{1}{2} \left(\sigma_{X_j X_j}(1, 1) - \sigma_{X_j X_j}(1, 0) - \sigma_{X_j X_j}(0, 1) \right) \\ \frac{1}{2} \left(\sigma_{X_j X_j}(1, 1) - \sigma_{X_j X_j}(1, 0) - \sigma_{X_j X_j}(0, 1) \right) & \sigma_{X_j X_j}(0, 1) \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}^{tr} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1 X_2}(1, 0, 1, 0) & \sigma_{X_1 X_2}(1, 0, 0, 1) \\ \sigma_{X_1 X_2}(0, 1, 1, 0) & \sigma_{X_1 X_2}(0, 1, 0, 1) \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Заметим, что матрица (1.44), найденная с помощью томограммы (3.33) совпадает с дисперсионной матрицей (3.29).

Рассмотрим эволюцию запутанности исследуемого состояния (3.28) с течением времени. Эволюция во времени матрицы дисперсий может быть найдена с помощью пропагатора (3.14), действующего на томограмму (3.33) и последующего применения метода расчёта дисперсий, изложенного выше. Наряду с данным методом, эволюция дисперсионной матрицы (3.29) может быть найдена непосредственно с помощью соотношения [67]

$$\sigma(t) = \Lambda^{-1}(t)\sigma(0)(\Lambda^{-1}(t))^{tr}, \quad (3.38)$$

вычисление которого приводит к следующему результату (следует заметить, что матрица $\Lambda(t)$ может быть легко обращена ввиду её симплектичности [67]):

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t) & \sigma_{12}(t) \\ \sigma_{21}(t) & \sigma_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

где (см. (3.27))

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(t) &= S_+(2, G, A, B, \varepsilon_1, \varepsilon_{-1}), \\ \sigma_{22}(t) &= S_+(2, G, B, A, \varepsilon_1, \varepsilon_{-1}), \\ \sigma_{12}(t) &= \sigma_{21}(t) = S_+(C, G, 1, 1, \varepsilon_1, \varepsilon_{-1}). \end{aligned}$$

С учётом вышеприведённого соотношения (3.12) находим определители вышеприведённых матриц:

$$\begin{aligned} \det \sigma_{11}(t) &= \det \sigma_{22}(t) = GAB, \\ \det \sigma_{12}(t) &= -\frac{1}{4}GC^2, \end{aligned}$$

и, соответственно, эволюцию во времени главных миноров (3.12):

$$\begin{aligned} \det_{(1)} \sigma(t) &= GB\varepsilon_1^2 + A\varepsilon_{-1}^2, \\ \det_{(2)} \sigma(t) &= GAB, \\ \det_{(3)} \sigma(t) &= \frac{1}{4}(GA\varepsilon_1^2 + B\varepsilon_{-1}^2), \\ \det_{(4)} \sigma(t) &= \det \sigma(t) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Полученные главные миноры матрицы $\sigma(t)$ являются положительными, что соответствует сохранению положительной определённости матрицы в процессе эволюции, при этом последнее соотношение свидетельствует о минимизации соотношения неопределённостей, т. е. о сохранении гауссовской формы квантового состояния. Аналогично, эволюция во

времени соотношений (3.31) приводит к результату:

$$\begin{aligned}\det_{(1)} \rho_\sigma(t) &= GB\varepsilon_1^2 + A\varepsilon_{-1}^2, \\ \det_{(2)} \rho_\sigma(t) &= \frac{1}{4}GC^2, \\ \det_{(3)} \rho_\sigma(t) &= 0, \\ \det_{(4)} \rho_\sigma(t) &= \det \rho_\sigma(t) = 0.\end{aligned}$$

Приведённые равенства свидетельствуют о положительной определённости матрицы $\rho_\sigma(t)$, что связано с выполнением соотношения неопределённостей.

Определитель (3.32) не зависит от времени в процессе эволюции, что соответствует запутанности состояния в любой момент времени (см. Рис. 3.1):

$$\det \rho_{\sigma(\kappa)}(t) = -\frac{1}{16}GC^2 \frac{(1-\kappa)^2}{\kappa^2} = \text{const.} \leq 0.$$

Таким образом, запутанность сохраняется в процессе временной эволюции с гамильтонианом (3.1) для изначально запутанных гауссовских состояний с волновой функцией вида (3.2).

3.5 Гамильтониан Калдиrolа-Канаи с дополнительным перекрёстным членом

Рассмотрим более общий случай гамильтониана Калдиrolа-Канаи, содержащий дополнительный перекрёстный член с произведением операторов координат:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}e^{-\gamma t} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2}e^{\gamma t}\omega^2(t) (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2) + \beta e^{\gamma t} \hat{q}_1 \hat{q}_2. \quad (3.40)$$

В данном случае нахождение $\Lambda(t)$ -матрицы (3.6) приводит к результату:

$$\Lambda(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{\gamma t} \dot{\lambda}'_+ & \lambda'_+ & -e^{\gamma t} \dot{\lambda}'_- & \lambda'_- \\ -e^{\gamma t} \dot{\lambda}_+ & \lambda_+ & -e^{\gamma t} \dot{\lambda}_- & \lambda_- \\ -e^{\gamma t} \dot{\lambda}'_- & \lambda'_- & -e^{\gamma t} \dot{\lambda}'_+ & \lambda'_+ \\ -e^{\gamma t} \dot{\lambda}_- & \lambda_- & -e^{\gamma t} \dot{\lambda}_+ & \lambda_+ \end{pmatrix},$$

где функции λ_+ , λ_- , λ'_+ и λ'_- определяются как

$$\begin{aligned}\lambda_{+,-} &= \varepsilon_+ \pm \varepsilon_-, \\ \lambda'_{+,-} &= \varepsilon'_+ \pm \varepsilon'_-.\end{aligned}$$

В данных соотношениях через ε_+ , ε'_+ , ε_- и ε'_- обозначены функции, зависящие от времени и являющиеся решениями уравнений движения

$$\begin{aligned}\ddot{\varepsilon}_{+,-} + \gamma \dot{\varepsilon}_{+,-} + (\omega^2(t) \pm \beta) \varepsilon_{+,-} &= 0, \\ \ddot{\varepsilon}'_{+,-} + \gamma \dot{\varepsilon}'_{+,-} + (\omega^2(t) \pm \beta) \varepsilon'_{+,-} &= 0,\end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}\varepsilon_{+,-}(0) &= 1, & \varepsilon'_{+,-}(0) &= 0, \\ \dot{\varepsilon}_{+,-}(0) &= 0, & \dot{\varepsilon}'_{+,-}(0) &= -1.\end{aligned}$$

Ввиду указанных уравнений движения и начальных условий имеет место соотношение:

$$\varepsilon'_{+,-} \dot{\varepsilon}_{+,-} - \dot{\varepsilon}'_{+,-} \varepsilon_{+,-} = e^{-\gamma t}.$$

В случае изначально сепарабельного состояния (рассмотрим пример когерентного состояния) вычисления с помощью соотношения (3.38) приводят к следующей зависимости во времени для блоков дисперсионной матрицы, имеющей аналогичное формуле (3.39) представление (см. определение (3.27)):

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \sigma_{22} &= S_+(1, 1, 1, 1, \varepsilon_+, \varepsilon_-) + S_+(1, 1, 1, 1, \varepsilon'_+, \varepsilon'_-), \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= S_-(1, 1, 1, 1, \varepsilon_+, \varepsilon_-) + S_-(1, 1, 1, 1, \varepsilon'_+, \varepsilon'_-).\end{aligned}$$

Согласно результатам, полученным в [67], для изначально когерентного состояния появляется перекрёстный член в экспоненте волновой функции в результате эволюции с гамильтонианом (3.40). С учётом данного результата, а также в силу запутанности любого квантового состояния с волновой функцией вида (3.28), приходим к следующему выводу: в процессе эволюции с гамильтонианом (3.40) любое изначально когерентное состояние будет становиться запутанным.

Аналогично, в случае изначально запутанного состояния с волновой функцией (3.28) может быть найдено:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= S_+\left(\frac{1}{2}, G, A, B, \lambda_+, \lambda'_+\right) + S_+\left(\frac{1}{2}, G, B, A, \lambda_-, \lambda'_-\right) + \frac{1}{4}\sigma'_+, \\ \sigma_{22} &= S_+\left(\frac{1}{2}, G, B, A, \lambda_+, \lambda'_+\right) + S_+\left(\frac{1}{2}, G, A, B, \lambda_-, \lambda'_-\right) + \frac{1}{4}\sigma'_+, \\ \sigma_{21} = \sigma_{12}^{tr} &= S_-\left(\frac{C}{4}, G, 1, 1, \lambda_+, \lambda'_+\right) + S_-\left(\frac{C}{4}, G, 1, 1, \lambda_-, \lambda'_-\right) + \frac{1}{4}\sigma'_-, \end{aligned}$$

где

$$\sigma'_+ = \frac{C}{2} \begin{pmatrix} 2(G\lambda_+\lambda_- - \lambda'_+\lambda'_-) & e^{\gamma t} \left(G(\lambda_+\dot{\lambda}_- + \dot{\lambda}_+\lambda_-) - (\lambda'_+\dot{\lambda}'_- + \dot{\lambda}'_+\lambda'_-) \right) \\ e^{\gamma t} \left(G(\lambda_+\dot{\lambda}_- + \dot{\lambda}_+\lambda_-) - (\lambda'_+\dot{\lambda}'_- + \dot{\lambda}'_+\lambda'_-) \right) & 2e^{2\gamma t} (G\dot{\lambda}_+\dot{\lambda}'_- - \dot{\lambda}'_+\dot{\lambda}'_-) \end{pmatrix},$$

$$\sigma'_- = \begin{pmatrix} (A+B)(G\lambda_+\lambda_- - \lambda'_+\lambda'_-) & e^{\gamma t} \left(G(A\lambda_+\dot{\lambda}_- + B\dot{\lambda}_+\lambda_-) + B\lambda'_+\dot{\lambda}'_- + A\dot{\lambda}'_+\lambda'_- \right) \\ e^{\gamma t} \left(G(B\lambda_+\dot{\lambda}_- + A\dot{\lambda}_+\lambda_-) + A\lambda'_+\dot{\lambda}'_- + B\dot{\lambda}'_+\lambda'_- \right) & e^{2\gamma t} (A+B) (G\dot{\lambda}_+\dot{\lambda}'_- - \dot{\lambda}'_+\dot{\lambda}'_-) \end{pmatrix}.$$

На практике задача об эволюции запутанности в случае конкретного вида зависимостей частот в любых квадратичных гамильтонианах (см. [67]) может быть решена с помощью критерия [60], рассмотренного на стр. 29.

Глава 4

Томографические характеристики некоторых спиновых систем

К настоящему моменту до сих пор остаётся нерешённой задача о запутанности спиновых систем, отличных от системы двух спинов $1/2$ и системы двух частиц со спинами $1/2$ и 1 , для которых был найден критерий запутанности Переса-Городецких [61, 62]. Томография спиновых состояний позволяет переформулировать данную задачу на язык теории вероятности и обычных функций распределений - спиновых томограмм, что позволяет надеяться на более быстрое решение проблемы запутанности в квантовой механике. Кроме того, различные вероятностные характеристики спиновых систем, такие как спиновая томограмма, томографическая энтропия и информация смогли быть введены в квантовую механику именно благодаря построению томографического (вероятностного) представления состояний. Данные томографические характеристики представляют интерес для изучения и более глубокого понимания квантовой механики и квантовомеханических состояний, а также для поиска критерия запутанности спиновых состояний.

В данной главе будут рассмотрены спиновые системы, описываемые матрицей плотности 4×4 , которая может быть интерпретирована двумя разными способами в зависимости от базиса состояний, в котором она опередлена. С одной стороны, любая матрица плотности 4×4 в зависимости от базиса может иметь смысл состояния одной частицы со спином $3/2$, и может быть вращаема в пространстве состояний с помощью D -функции Вигнера $D_{mm'}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta, \gamma)$. С другой стороны, эта же матрица плотности может трактоваться как состояние системы двух спинов $1/2$, и быть вращаемой с помощью прямого произведения двух вигнеровских D -функций $D_{mm'}^{(\frac{1}{2})}(\alpha, \beta, \gamma)$, каждая из которых поворачивает только

одну из составляющих частиц. Томографический подход к описанию спиновых состояний позволяет сопоставить функцию распределения, содержащую в себе всю информацию о квантовой системе, обоим указанным случаям. В связи с этим возникает вопрос о специфических свойствах системы «без внутренней структуры» (например, частицы со спином $3/2$) и системы, «имеющей внутреннюю структуру» (например, системы двух спинов). Наряду с этим, представляет интерес вопрос о специфических свойствах состояния частицы со спином $3/2$ и матрицей плотности, которая соответствует запутанному состоянию при её интерпретации в базисе состояний двух спинов $1/2$.

Далее будут изучены состояния различных спиновых систем, формально описываемые одной и той же матрицей плотности, на примере матрицы, соответствующей состоянию Вернера [68] системы двух спинов $1/2$ и матрицы несколько более общего вида, чем для состояния Вернера, которую условимся называть *обобщённой матрицей плотности Вернера* (см. далее).

Ради полноты картины также приведём графики томографических характеристик чистых состояний частиц со спином $1/2$, 1 и $3/2$ с определённой проекцией спина на ось z .

4.1 Томографические характеристики частиц без внутренней структуры

Рассмотрим случай спиновых квантовых систем, не имеющих внутренней структуры.

Выражение для спиновой томограммы частицы со спином j (1.35) может быть переписано в более удобной для вычислений форме. Поскольку D -функция может быть представлена в виде [58]

$$D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{im'\gamma} d_{m'm}^{(j)}(\beta) e^{im\alpha},$$

соотношение (1.35) может быть переписано как

$$\omega^{(j)}(m, \alpha, \beta) = (d^{(j)}(\beta) \tilde{\rho}^{(j)} d^{(j)+}(\beta))_{mm}, \quad (4.1)$$

где

$$\tilde{\rho}_{m_1 m_2}^{(j)} = \rho_{m_1 m_2}^{(j)} e^{i(m_1 - m_2)\alpha}$$

(суммирования по повторяющимся индексам m не подразумевается). Соотношение (4.1) может быть сведено к следующему:

$$\omega^{(j)}(m, \alpha, \beta) = \sum_{\substack{m_1, m_2=j \\ m_1 \geq m_2}}^{-j} 2^{1-\delta_{m_1 m_2}} \operatorname{Re} \left(\rho_{m_1 m_2}^{(j)} e^{i(m_1 - m_2)\alpha} \right) d_{m m_1}^{(j)}(\beta) d_{m m_2}^{(j)}(\beta). \quad (4.2)$$

Применим соотношение (4.2) к вычислению томограмм систем со спином $j = 1$ и $3/2$ и матрицей плотности общего вида $\rho_{m_1 m_2}^{(j)}$.

Для системы со спином $j = 1$, описываемой матрицей плотности

$$\rho_{m_1 m_2}^{(1)} = \begin{pmatrix} \rho_{1,1}^{(1)} & \rho_{1,0}^{(1)} & \rho_{1,-1}^{(1)} \\ \rho_{0,1}^{(1)} & \rho_{0,0}^{(1)} & \rho_{0,-1}^{(1)} \\ \rho_{-1,1}^{(1)} & \rho_{-1,0}^{(1)} & \rho_{-1,-1}^{(1)} \end{pmatrix},$$

где $m_1, m_2 = 1, 0, -1$, компоненты томограммы $\omega^{(1)}(m, \alpha, \beta)$, для $m = 1, 0, -1$ (см. соотношение (4.2)) имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega^{(1)}(1, \alpha, \beta) &= \rho_{1,1}^{(1)} \cos^4 \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \rho_{0,0}^{(1)} \sin^2 \beta + \rho_{-1,-1}^{(1)} \sin^4 \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \beta \operatorname{Re} \left(\rho_{1,-1}^{(1)} e^{2i\alpha} \right) + \\ &\quad + \sqrt{2} \sin \beta \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{1,0}^{(1)} e^{i\alpha} \right) + \sin^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{0,-1}^{(1)} e^{i\alpha} \right) \right), \\ \omega^{(1)}(0, \alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \rho_{1,1}^{(1)} \sin^2 \beta + \rho_{0,0}^{(1)} \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \rho_{-1,-1}^{(1)} \sin^2 \beta - \sin^2 \beta \operatorname{Re} \left(\rho_{1,-1}^{(1)} e^{2i\alpha} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2\beta) \left(\operatorname{Re} \left(\rho_{1,0}^{(1)} e^{i\alpha} \right) - \operatorname{Re} \left(\rho_{0,-1}^{(1)} e^{i\alpha} \right) \right), \\ \omega^{(1)}(-1, \alpha, \beta) &= \rho_{1,1}^{(1)} \sin^4 \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \rho_{0,0}^{(1)} \sin^2 \beta + \rho_{-1,-1}^{(1)} \cos^4 \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \beta \operatorname{Re} \left(\rho_{1,-1}^{(1)} e^{2i\alpha} \right) - \\ &\quad - \sqrt{2} \sin \beta \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{1,0}^{(1)} e^{i\alpha} \right) + \cos^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{0,-1}^{(1)} e^{i\alpha} \right) \right). \end{aligned}$$

Аналогично, с помощью соотношения (4.2) для системы со спином $j = \frac{3}{2}$, описываемой матрицей плотности

$$\rho_{m_1, m_2}^{\left(\frac{3}{2}\right)} = \begin{pmatrix} \rho_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} & \rho_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} & \rho_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} & \rho_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} \\ \rho_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} & \rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} & \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} & \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} \\ \rho_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} & \rho_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} & \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} & \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} \\ \rho_{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} & \rho_{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} & \rho_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} & \rho_{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{\left(\frac{3}{2}\right)} \end{pmatrix},$$

где $m_1, m_2 = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, томограмма $\omega^{\left(\frac{3}{2}\right)}(m, \alpha, \beta)$, с $m = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ имеет следующий вид: вероятность обнаружения проекции спина, равной $3/2$ на направление (α, β) даётся

выражением

$$\begin{aligned}
\omega^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta) &= \rho_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \cos^6 \frac{\beta}{2} + 3\rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^4 \frac{\beta}{2} + 3\rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^4 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \rho_{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^6 \frac{\beta}{2} + \\
&\quad + \frac{1}{4} \sin^3 \beta \left(3 \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{3i\alpha} \right) \right) + \\
&\quad + \sqrt{3} \sin \beta \left(\cos^4 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \sin^4 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) \right) + \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \beta \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) + \sin^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) \right),
\end{aligned} \tag{4.3}$$

вероятность обнаружения проекции спина, равной $1/2$ на направление (α, β) даётся выражением

$$\begin{aligned}
\omega^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta) &= 3\rho_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^4 \frac{\beta}{2} + \rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \cos^2 \frac{\beta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)^2 + \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} \left(1 - 3 \cos^2 \frac{\beta}{2} \right)^2 + \\
&\quad + 3\rho_{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^4 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + 2 \sin \beta \left(1 - \frac{9}{8} \sin^2 \beta \right) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) - \frac{3}{4} \sin^3 \beta \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{3i\alpha} \right) - \\
&\quad - \sqrt{3} \sin \beta \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \sin^2 \frac{\beta}{2} \left(1 - 3 \cos^2 \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{Re} \left(\rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) \right) + \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \beta \left(\left(1 - 3 \cos^2 \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) + \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) \right),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

вероятность обнаружения проекции спина, равной $-1/2$ на направление (α, β) даётся выражением

$$\begin{aligned}
\omega^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta) &= 3\rho_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^4 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} \left(1 - 3 \cos^2 \frac{\beta}{2} \right)^2 + \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \cos^2 \frac{\beta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)^2 + \\
&\quad + 3\rho_{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^4 \frac{\beta}{2} - 2 \sin \beta \left(1 - \frac{9}{8} \sin^2 \beta \right) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \frac{3}{4} \sin^3 \beta \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{3i\alpha} \right) + \\
&\quad + \sqrt{3} \sin \beta \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} \left(1 - 3 \cos^2 \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \cos^2 \frac{\beta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{Re} \left(\rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) \right) + \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \beta \left(\left(1 - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) + \left(1 - 3 \cos^2 \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) \right),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

и вероятность обнаружения проекции спина, равной $-3/2$ на направление (α, β) даётся выражением

$$\begin{aligned}
\omega^{(\frac{3}{2})}(-\frac{3}{2}, \alpha, \beta) &= \rho_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^6 \frac{\beta}{2} + 3\rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^4 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + 3\rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^4 \frac{\beta}{2} + \rho_{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \cos^6 \frac{\beta}{2} - \\
&\quad - \frac{1}{4} \sin^3 \beta \left(3 \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{3i\alpha} \right) \right) - \\
&\quad - \sqrt{3} \sin \beta \left(\sin^4 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \cos^4 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) \right) + \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \beta \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) + \cos^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) \right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Графики томограмм и томографических энтропий схематически могут быть представлены как функции на сфере, т. е. сферический радиус r может быть положен равным

томографической энтропии $S(\alpha, \beta)$ или компоненте томограммы $\omega^{(j)}(m, \alpha, \beta)$, соответствующей проекции углового момента m на ось z :

$$r(\alpha, \beta) = S(\alpha, \beta)$$

или

$$r(\alpha, \beta) = \omega^{(j)}(m, \alpha, \beta),$$

при этом x , y и z определяются как декартовы координаты вектора r при построении графиков энтропии $S(\alpha, \beta)$ или компоненты томограммы $\omega^{(j)}(m, \alpha, \beta)$:

$$r^2(\alpha, \beta) = x^2 + y^2 + z^2,$$

где

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\alpha) \sin(\beta), \\ y &= r \sin(\alpha) \sin(\beta), \\ z &= r \cos(\beta). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Таким образом, в общем случае любая система со спином j может характеризоваться $2j + 1$ поверхностями для томографических компонент $\omega^{(j)}(m, \alpha, \beta)$, $m = j, j - 1, \dots, -j$ и одной поверхностью для томографической энтропии $S(\alpha, \beta)$.

Следует заметить, что в силу симметрии томографические компоненты и томографическая энтропия не зависят от долготы α для чистых состояний с определённой проекцией углового момента на ось z . В этом случае условимся изображать томографическую энтропию и томографические компоненты на таком же графике, но в полярной системе координат (r, β) , где $r(\beta)$ является томографической энтропией $S(\beta)$ или компонентой томограммы $\omega^{(j)}(m, \beta)$, и

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\beta), \\ z &= r \cos(\beta). \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.2 Томографические характеристики частиц со спином j в $|jm\rangle$ -состояниях

В данном параграфе будут исследованы томограммы и томографические энтропии некоторых спиновых состояний $|jm\rangle$ частиц со спином $j = 1/2, 1$ и $3/2$.

Томографические компоненты $\omega_{|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle}^{(\frac{1}{2})}(m, \beta)$, $m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ и томографическая энтропия $S_{|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle}^{(\frac{1}{2})}(\beta)$ представлены на Рис. 4.1 для состояния $|j, m\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ в полярной системе координат (4.8). Как следует из уравнения (1.36) и симметричных свойств графиков, представленных на Рис. 4.1, достаточно зеркально отобразить указанный график относительно оси x для получения томографических характеристик состояния $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$.

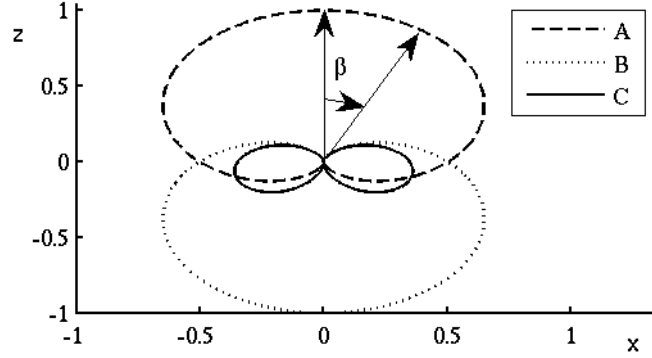


Рис. 4.1: Томографические характеристики состояния $|j, m\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ в полярных координатах. Томографические компоненты $\omega_{|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle}^{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2}, \beta)$ (A), $\omega_{|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle}^{(\frac{1}{2})}(-\frac{1}{2}, \beta)$ (B), и томографическая энтропия $S_{|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle}^{(\frac{1}{2})}(\beta)$ (C).

Томографические компоненты $\omega_{|1, 1\rangle}^{(1)}(m, \beta)$, $m = 1, 0, -1$ и томографическая энтропия $S_{|1, 1\rangle}^{(1)}(\beta)$ для состояния $|j, m\rangle = |1, 1\rangle$ представлены слева на Рис. 4.2. Здесь и далее условимся изображать двумерные графики томографических характеристик в такой же полярной системе координат (4.8) как для состояния $|j, m\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, представленного на Рис. 4.1. Следует заметить, что максимум томографической компоненты $\omega_{|1, 1\rangle}^{(1)}(0, \beta)$ равен 0.5, что соответствует отсутствию какого-либо поворота осей, переводящего рассматриваемое состояние в состояние с определённым значением проекции углового момента (спина). Для нахождения таких же томографических характеристик для состояния $|1, -1\rangle$ достаточно зеркально отобразить график относительно оси x (см. (1.36)). Заметим, что данное преобразование не меняет томографическую энтропию состояния. Данный результат свидетельствует о том, что томографическая энтропия не содержит в себе всей необходимой информации о квантовом состоянии и, следовательно, реконструкция квантового состояния системы по его томографической энтропии в общем случае является невозможным.

Такие же графики, но для состояния $|j, m\rangle = |1, 0\rangle$ представлены справа на Рис. 4.2. В данном случае $\omega_{|1, 0\rangle}^{(1)}(1, \beta) = \omega_{|1, 0\rangle}^{(1)}(-1, \beta)$ (см. (1.37)), что даёт зеркальную симметрию

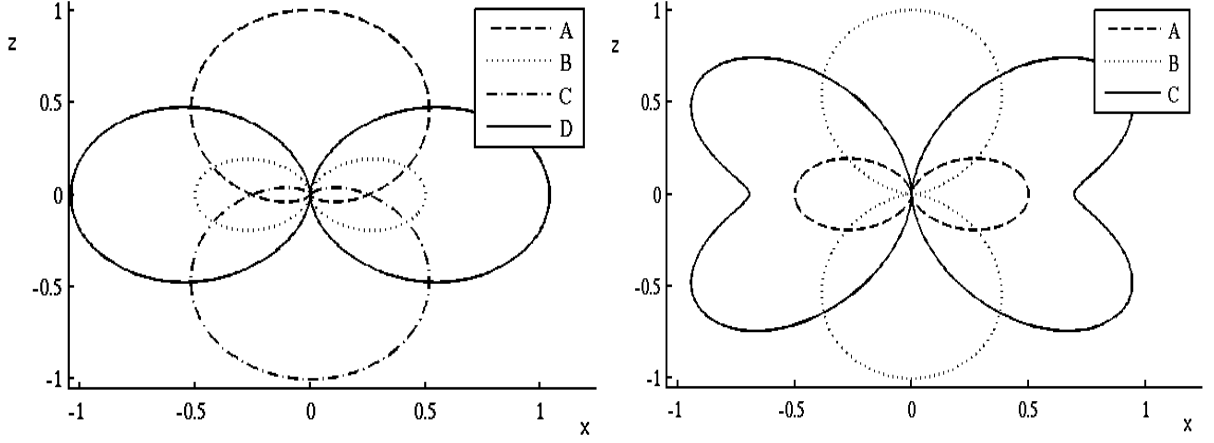


Рис. 4.2: Томографические характеристики состояний $|j, m\rangle = |1, 1\rangle$ (слева) и $|j, m\rangle = |1, 0\rangle$ (справа) в полярной системе координат. Томографические компоненты $\omega_{|1,m\rangle}^{(1)}(1, \beta)$ (A), $\omega_{|1,m\rangle}^{(1)}(0, \beta)$ (B) и $\omega_{|1,m\rangle}^{(1)}(-1, \beta)$ (C) и томографическая энтропия $S_{|1,m\rangle}^{(1)}(\beta)$, $m = 1, 0$ (D).

графиков.

Графики томографических компонент $\omega_{|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle}^{(\frac{3}{2})}(m, \beta)$, $m = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ и томографической энтропии $S_{|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle}^{(\frac{3}{2})}(\beta)$ для состояния $|j, m\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$ представлены слева на Рис. 4.3. Как следует из уравнения (1.36), зеркальное отображение графика относительно оси x даёт характеристики для состояния $|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$.

Такие же графики для состояния $|jm\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ представлены справа на Рис. 4.3.

4.3 Вернеровское состояние частицы со спином $j = 3/2$

Рассмотрим *вернеровское* состояние частицы со спином $j = \frac{3}{2}$ - состояние, матрица плотности $\rho_W^{(\frac{3}{2})}(p)$ которого формально совпадает со спиновой матрицей плотности $\rho_W(p)$ состояния Вернера [68] двух частиц со спином $1/2$:

$$\rho_W^{(\frac{3}{2})}(p) = \rho_W(p) = \begin{pmatrix} (1+p)/4 & 0 & 0 & p/2 \\ 0 & (1-p)/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-p)/4 & 0 \\ p/2 & 0 & 0 & (1+p)/4 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

где p - параметр состояния - является переменной из области

$$-\frac{1}{3} < p < 1. \quad (4.10)$$

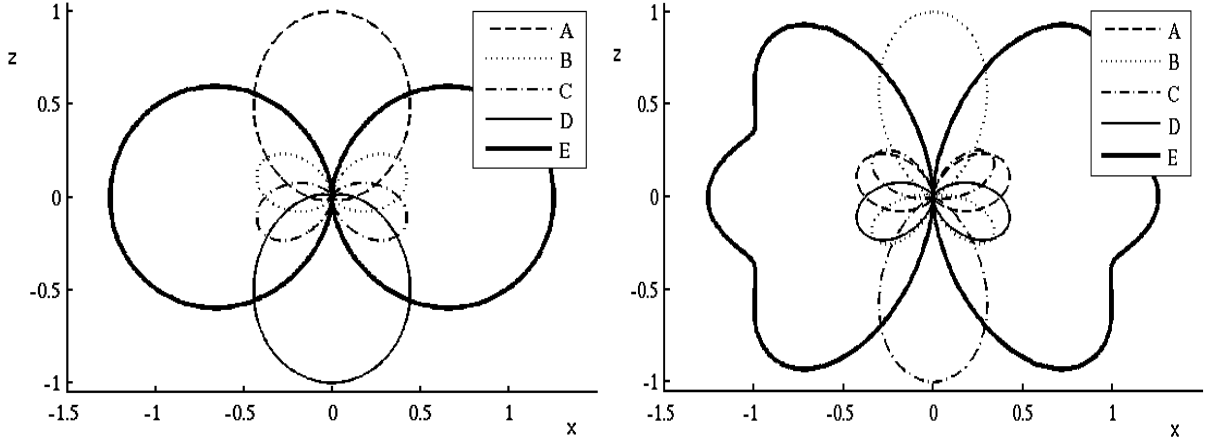


Рис. 4.3: Томографические характеристики состояний $|j, m\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$ (слева) and $|j, m\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ (справа) в полярных координатах. Томографические компоненты $\omega_{|\frac{3}{2}, m\rangle}^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \beta)$ (A), $\omega_{|\frac{3}{2}, m\rangle}^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \beta)$ (B), $\omega_{|\frac{3}{2}, m\rangle}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}, \beta)$ (C) и $\omega_{|\frac{3}{2}, m\rangle}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{3}{2}, \beta)$ (D) и томографическая энтропия $S_{|\frac{3}{2}, m\rangle}^{(\frac{3}{2})}(\beta)$, $m = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ (E).

В случае, если бы матрица (4.9) была бы матрицей плотности для двух частиц со спином $1/2$ в стандартном базисе

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |+\rangle|+\rangle, & |2\rangle &= |+\rangle|-\rangle, \\ |3\rangle &= |-\rangle|+\rangle, & |4\rangle &= |-\rangle|-\rangle, \end{aligned} \quad (4.11)$$

область параметров

$$\frac{1}{3} < p < 1$$

соответствовала бы запутанному состоянию (см., например, [69]).

Для частицы со спином $3/2$, состояние которой описывается спиновой матрицей плотности (4.9) томографические компоненты общего вида (4.3)- (4.6) принимают вид:

$$\begin{aligned} \omega_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}\left(\frac{3}{2}, \alpha, \beta\right) &= \frac{1}{4}(1+p) - \frac{3p}{8}\sin^2\beta + \frac{p}{8}\sin^3\beta\cos 3\alpha, \\ \omega_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}\left(\frac{1}{2}, \alpha, \beta\right) &= \frac{1}{4}(1-p) + \frac{3p}{8}\sin^2\beta - \frac{3p}{8}\sin^3\beta\cos 3\alpha, \\ \omega_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}\left(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta\right) &= \frac{1}{4}(1-p) + \frac{3p}{8}\sin^2\beta + \frac{3p}{8}\sin^3\beta\cos 3\alpha, \\ \omega_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}\left(-\frac{3}{2}, \alpha, \beta\right) &= \frac{1}{4}(1+p) - \frac{3p}{8}\sin^2\beta - \frac{p}{8}\sin^3\beta\cos 3\alpha. \end{aligned}$$

Графики томографических компонент $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$ и $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$ в сферических координатах (4.7) представлены слева на Рисс. 4.4 и 4.5. Вид этих же самых томограмм в плоскости (x, y) представлен справа на Рисс. 4.4 и 4.5.

Рассмотрим следующие три точки (α, β) на сфере: $(\pi, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ и $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$. Данные точки соответствуют трём минимумам томографической компоненты $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$, трём

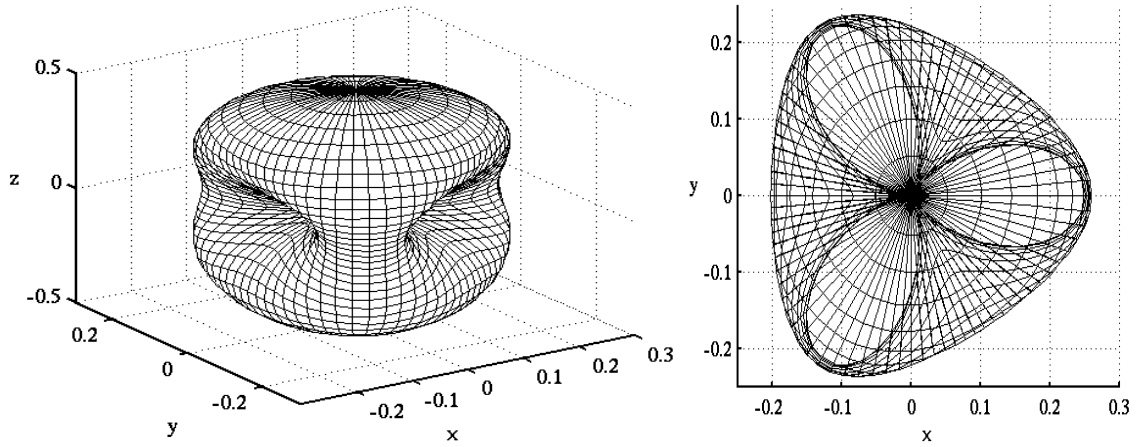


Рис. 4.4: Томографическая компонента $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$ для вернеровского состояния частицы со спином $3/2$ как функция на сфере и её вид в плоскости (x, y) .

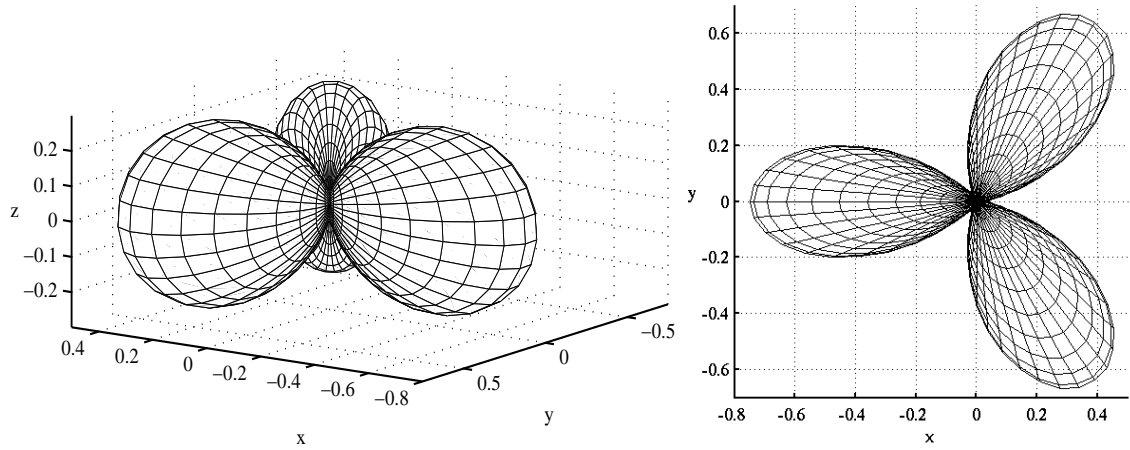


Рис. 4.5: Томографическая компонента $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$ для вернеровского состояния частицы со спином $3/2$ как функция на сфере и её вид в плоскости (x, y) .

максимумам томографической компоненты $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$ и трём седловым точкам томографической компоненты $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$. Минимальные значения томографических компонент равны нулю, в то время как максимальные значения равны $3/4$. В седловых точках томографические компоненты принимают значение $1/4$. Кроме того, данные точки соответствуют нулям томографической компоненты $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$.

Аналогичное замечание может быть сделано для точек (α, β) , равных $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ и $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, которые соответствуют трём минимумам томографической компоненты $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$, трём максимумам томографической компоненты $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$ и трём седловым точкам томографической компоненты $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$. Минимальные значения томографических компонент равны нулю, в то время как максимальные значения рав-

ны $3/4$, в седловых же точках томографические компоненты равны $1/4$. Наряду с этим, данные точки соответствуют нулям томографической компоненты $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$.

Точки (α, β) , равные $(\alpha, 0)$ и (α, π) , соответствуют максимуму томографических компонент $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$ и $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$, который равен $1/2$, томографические же компоненты $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$ и $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$ равны нулю в этих точках.

Графики томографических компонент $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$ и $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$, согласно соотношению (1.36) могут быть получены как отражение графиков 4.4 и 4.5 относительно точки $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Данная операция инверсии эквивалентна замене $r \leftrightarrow -r$ в сферических координатах, но в частном случае вернеровского состояния, описываемого спиновой матрицей плотности (4.9) операция инверсии сводится к зеркальному отражению относительно плоскости xz . Аналогично, зеркальная симметрия для двумерных графиков томографических компонент (где строилась томографическая компонента $\omega^{(j)}(-m, \alpha, \beta)$ с помощью томографической компоненты $\omega^{(j)}(m, \alpha, \beta)$), рассмотренная выше, является частным случаем центральной симметрии, следующей из (1.36).

Томографическая энтропия $S_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ для частицы со спином $3/2$, находящейся в состоянии с матрицей плотности (4.9) представлена слева на Рис. 4.6. Вид данной поверхности в плоскости (x, y) показан справа на Рис. 4.6.

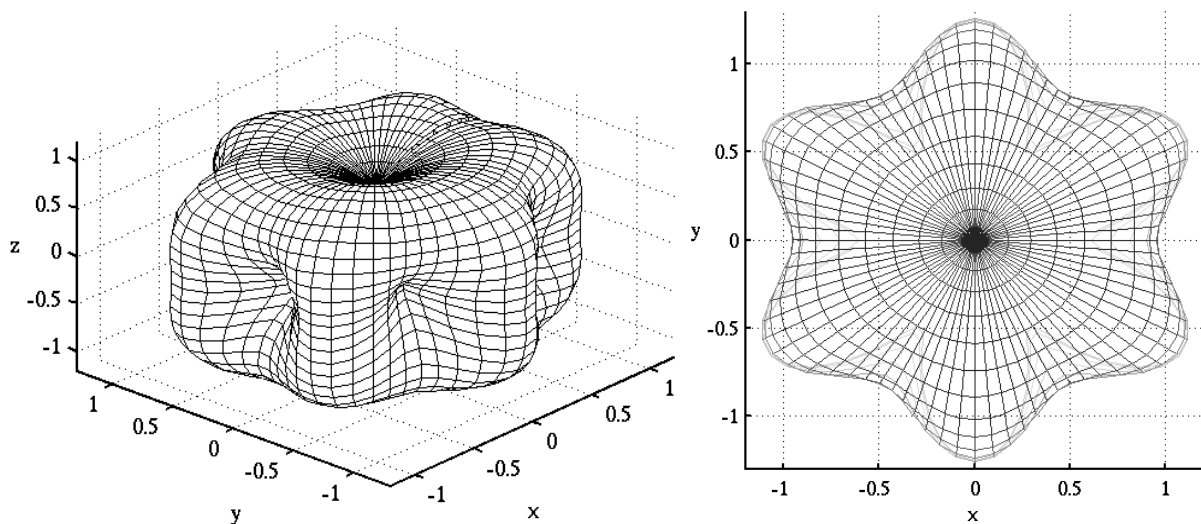


Рис. 4.6: Томографическая энтропия $S_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ для частицы со спином $3/2$, находящейся в вернеровском состоянии, представленная как функция на сфере и её вид в плоскости (x, y) .

Томографическая энтропия $S_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ имеет минимумы на сфере во всех направлениях, уже упоминавшихся в связи со свойствами томографических компонент $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(m, \alpha, \beta)$. Соответственно, томографическая энтропия имеет минимум в восьми направлениях (α, β) :

шесть направлений $(\frac{n\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, $n = 0, 1, \dots, 5$ соответствуют абсолютному минимуму томографической энтропии, в которых она принимает значение $-\ln \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}$, другие же два полярных направления $(\alpha, 0)$ и (α, π) соответствуют значению томографической энтропии, равному $\ln 2$. Максимум томографической энтропии $S_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ на сфере приблизительно равен 1.39.

На сфере могут существовать направления, на которых какая-либо томографическая компонента равна единице, а томографическая энтропия, соответственно, нулю. Данная ситуация имеет место исключительно для чистых состояний, в то время как любое смешанное состояние, например, вернеровское состояние с $p \neq 1$ не может иметь данного свойства.

Рассмотрим первые три томографических компоненты $\omega_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$, $\omega_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$ и $\omega_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$, которые задают трёхмерную поверхность, параметризуемую двумя параметрами α и β т. е.

$$x = \omega_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta), \quad y = \omega_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta) \quad z = \omega_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta).$$

Данная поверхность будет являться частью плоскости в случае вернеровского состояния (4.9) частицы со спином $3/2$. Пример данной поверхности для случая $p = 1/3$ приведён на Рис. 4.7.

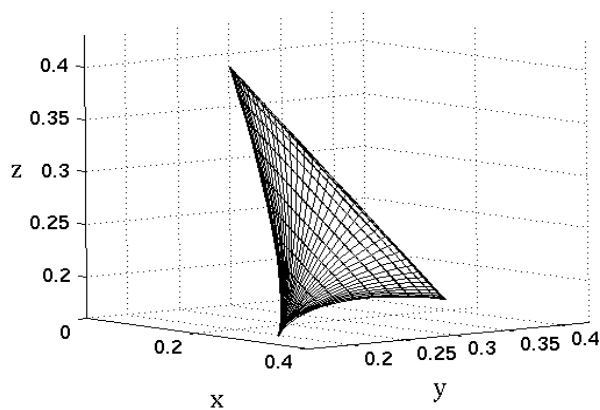


Рис. 4.7: Трёхмерная поверхность $x = \omega_{\rho_W(\frac{1}{3})}^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$, $y = \omega_{\rho_W(\frac{1}{3})}^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$, $z = \omega_{\rho_W(\frac{1}{3})}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$ для частицы со спином $3/2$, находящейся в вернеровском состоянии (4.9).

Качественный вид поверхностей - томографических компонент и томографической энтропии для других значений параметра состояния p остаётся таким же. Энтропия фон Ноймана (1.39) для состояния частицы со спином $3/2$ и матрицей плотности (4.9), как

функция параметра p имеет вид:

$${}^{VN}S_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})} = -\frac{3}{4}(1-p) \ln \frac{1-p}{4} + \frac{1+3p}{4} \ln \frac{1+3p}{4}. \quad (4.12)$$

Справа на рис. 4.8 представлен график максимум томографической энтропии вернеровского состояния как функция параметра состояния p . График энтропии фон Ноймана как функции параметра p одновременно с графиком минимума томографической энтропии представлен слева на Рис. 4.8, откуда видно, что минимум томографической энтропии не может быть меньше фон-ноймановского. Не удалось пронаблюдать какие-либо качественные особенности в поведении томографической компоненты $\omega_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(m, \alpha, \beta)$, энтропии фон Ноймана или томографической энтропии на всём диапазоне допустимых значений параметра p .

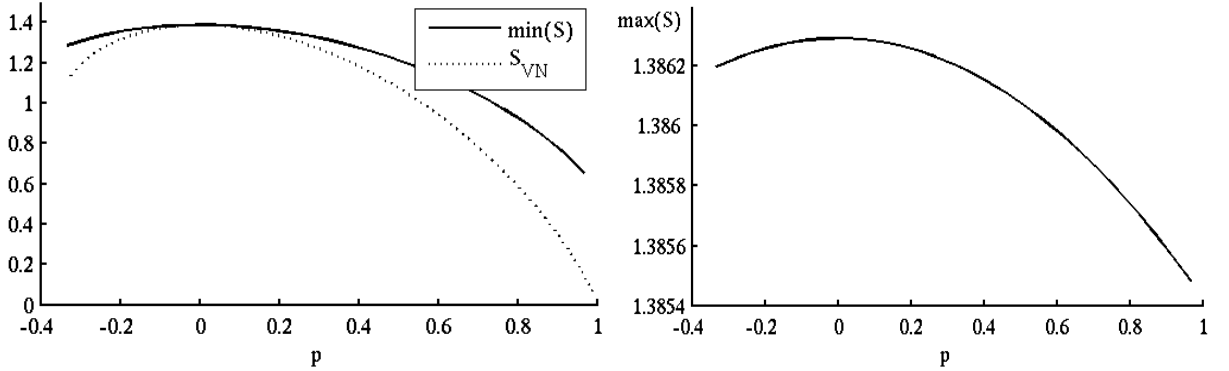


Рис. 4.8: Вернеровское состояние частицы со спином $3/2$. Минимум томографической энтропии $S_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ и фон-ноймановской энтропии ${}^{VN}S_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}$ как функции параметра p (слева). Максимум томографической энтропии $S_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ как функция параметра p (справа).

Рассмотрим соотношение (1.35) для матрицы, полученной ppt-преобразованием от матрицы плотности (4.9)

$${}^{ppt}\rho_W^{(\frac{3}{2})}(p) = \begin{pmatrix} (1+p)/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)/4 & p/2 & 0 \\ 0 & p/2 & (1-p)/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+p)/4 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Томограмма, формально найденная с помощью матрицы (4.13) (условимся называть её *ppt-томограммой*), рассматриваемой как спиновая матрица плотности для частицы со спином $3/2$ является обычной функцией распределения 4-х дискретных переменных, как и обычная спиновая томограмма частицы со спином $3/2$. В случае положительности матрицы (4.13) компоненты томограммы будут иметь положительные значения.

ppt-томографическая энтропия ${}^{ppt}S_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ является положительной функцией для положительной ppt-матрицы (4.13) и имеет мнимую часть в случае наличия отрицательных собственных значений матрицы. График мнимой части ppt-томографической энтропии ${}^{ppt}S_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ для углов $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$ как функции параметра p вернеровского состояния представлены слева на Рис. 4.9. Минимальное значение параметра p , при котором мнимая часть томографической ppt-энтропии ${}^{ppt}S_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ появляется для каких-либо углов (α, β) представлена как функция на сфере (α, β) справа на Рис. 4.9.

Если формально рассматривать матрицу (4.13) как матрицу плотности двух частиц со спином $1/2$, её положительность соответствовала бы сепарабельному состоянию, нарушение же положительной определённости соответствовало бы запутанности состояния.

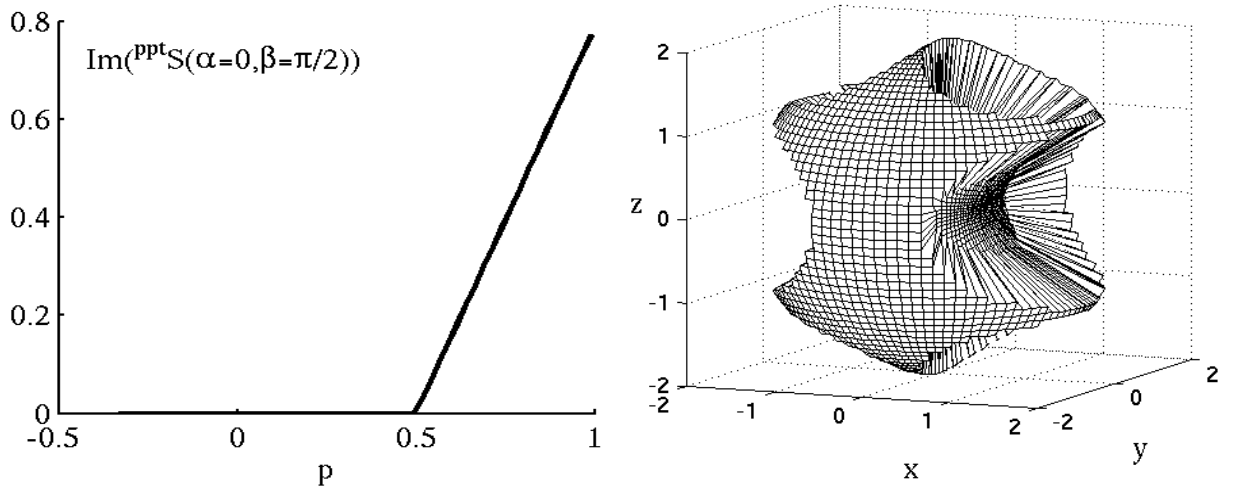


Рис. 4.9: Вернеровское состояние частицы со спином $3/2$. Мнимая часть ppt-томографической энтропии ${}^{ppt}S_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ для углов $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$ в зависимости от параметра состояния p (слева). Минимальное значение параметра p , при котором мнимая часть томографической энтропии ${}^{ppt}S_{\rho_W(p)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ появляется для каких-либо углов (α, β) , представленная как функция на сфере (α, β) (в случае отсутствия таковых углов значение радиуса сферы полагалось равным двум)(справа).

4.4 Обобщённое вернеровское состояние частицы со спином $j = \frac{3}{2}$

Рассмотрим более общий вид матрицы 4×4 , чем вернеровское состояние (4.9) частицы со спином $3/2$ - *обобщённое* вернеровское состояние частицы со спином $3/2$, содержащее дополнительный параметр b , который мы будем для простоты считать вещественным. Матрица плотности обобщённого вернеровского состояния, по определению, даётся следующим соотношением:

$$\rho_W^{(\frac{3}{2})}(p, b) = \begin{pmatrix} (1+p)/4 & 0 & 0 & p/2 \\ 0 & (1-p)/4 & b & 0 \\ 0 & b & (1-p)/4 & 0 \\ p/2 & 0 & 0 & (1+p)/4 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Собственные значения данной матрицы $\lambda_{\rho_W(p,b)}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$ зависят от параметра b :

$$\begin{aligned} \lambda_{\rho_W(p,b)}^{(1)} &= \frac{1}{4}(1+3p), \\ \lambda_{\rho_W(p,b)}^{(2)} &= \frac{1}{4}(1-p) - b, \\ \lambda_{\rho_W(p,b)}^{(3)} &= \frac{1}{4}(1-p) + b, \\ \lambda_{\rho_W(p,b)}^{(4)} &= \frac{1}{4}(1-p). \end{aligned}$$

Положительная определённость матрицы плотности (4.14) накладывает ограничения на допустимые значения параметров состояния p и b . Параметр p может меняться в тех же диапазонах (4.10), что и в обычном вернеровском состоянии (4.9), параметр же b обязан удовлетворять соотношению:

$$|b| \leq \frac{1}{4}(1-p). \quad (4.15)$$

Матрица плотности (4.14) может быть формально рассмотрена и как матрица состояния системы двух спинов $1/2$ - условимся называть такое состояние *обобщённым вернеровским состоянием системы двух спинов*. Рассматривая матрицу плотности в базисе состояний двух спинов $1/2$ и применяя критерий запутанности Переса-Городецких (см. стр. 30, а также [61, 62]), получаем условие сепарабельности: состояние (4.14) системы

двух спинов является сепарабельным, если следующая ppt-матрица

$${}^{ppt}\rho_W(p, b) = \begin{pmatrix} (1+p)/4 & 0 & 0 & b \\ 0 & (1-p)/4 & p/2 & 0 \\ 0 & p/2 & (1-p)/4 & 0 \\ b & 0 & 0 & (1+p)/4 \end{pmatrix}$$

является положительной, и запутанным в противном случае. Собственные значения ppt-матрицы ирмеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{{}^{ppt}\rho_W(p,b)}^{(1)} &= \frac{1}{4}(1-3p), \\ \lambda_{{}^{ppt}\rho_W(p,b)}^{(2)} &= \frac{1}{4}(1+p) - b, \\ \lambda_{{}^{ppt}\rho_W(p,b)}^{(3)} &= \frac{1}{4}(1+p) + b, \\ \lambda_{{}^{ppt}\rho_W(p,b)}^{(4)} &= \frac{1}{4}(1+p). \end{aligned} \tag{4.16}$$

С учётом (4.16) получаем, что значения параметра b , удовлетворяющие условию

$$|b| \leq \frac{1}{4}(1+p) \tag{4.17}$$

соответствуют сепарабельному состоянию, если $|p| \leq \frac{1}{3}$, другие допустимые значения соответствуют запутанному состоянию системы двух спинов $1/2$. Область «сепарабельности» и «запутанности» схематически изображена на Рис. 4.10.

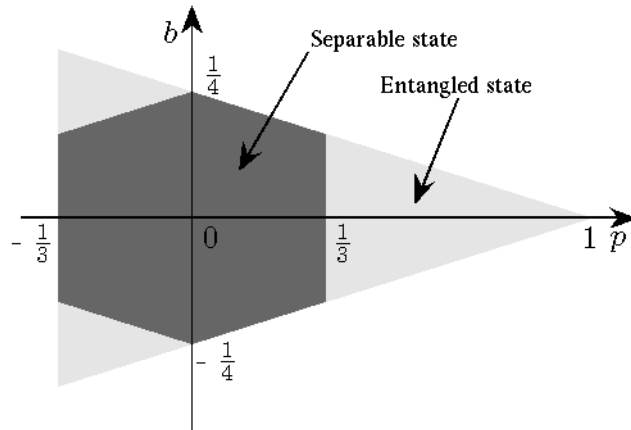


Рис. 4.10: Диаграмма допустимых совместных значений параметров p и b обобщённого вернеровского состояния. В случае обобщённого вернеровского состояния тёмные области соответствуют сепарабельному состоянию, а светлые - запутанному.

Компоненты томограмм $\omega_{\rho_W(p,b)}^{(\frac{3}{2})}(m, \alpha, \beta)$, $m = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ и томографической энтропии $S_{\rho_W(p,b)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ для диапазона значений $b \approx 0$ будет обладать схожим поведением с

рассмотренными случаями вернеровской матрицы плотности без коэффициента b (см. Рисс. 4.4, 4.5, 4.6). Точки (p, b) , равные $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ и $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ на треугольнике допустимых значений 4.10 и соответствующие левым верхнему и нижним углам, соответственно, являются предельными точками для качественного вида соответствующих им томографических компонент $\omega_{\rho_W(p,b)}^{(\frac{3}{2})}(m, \alpha, \beta)$ и энтропий $S_{\rho_W(p,b)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$, которые относительно заметно меняют свой качественный вид при приближении к данным предельным случаям (точкам). Можно сказать, что верхняя и нижняя часть треугольника допустимых значений не являются симметричными по отношению к качественному виду томограмм и энтропий. Характерные томографические компоненты, и томографические энтропии, соответствующие верхним и нижним частям треугольника, приведены на Рисс. 4.11 и 4.12.

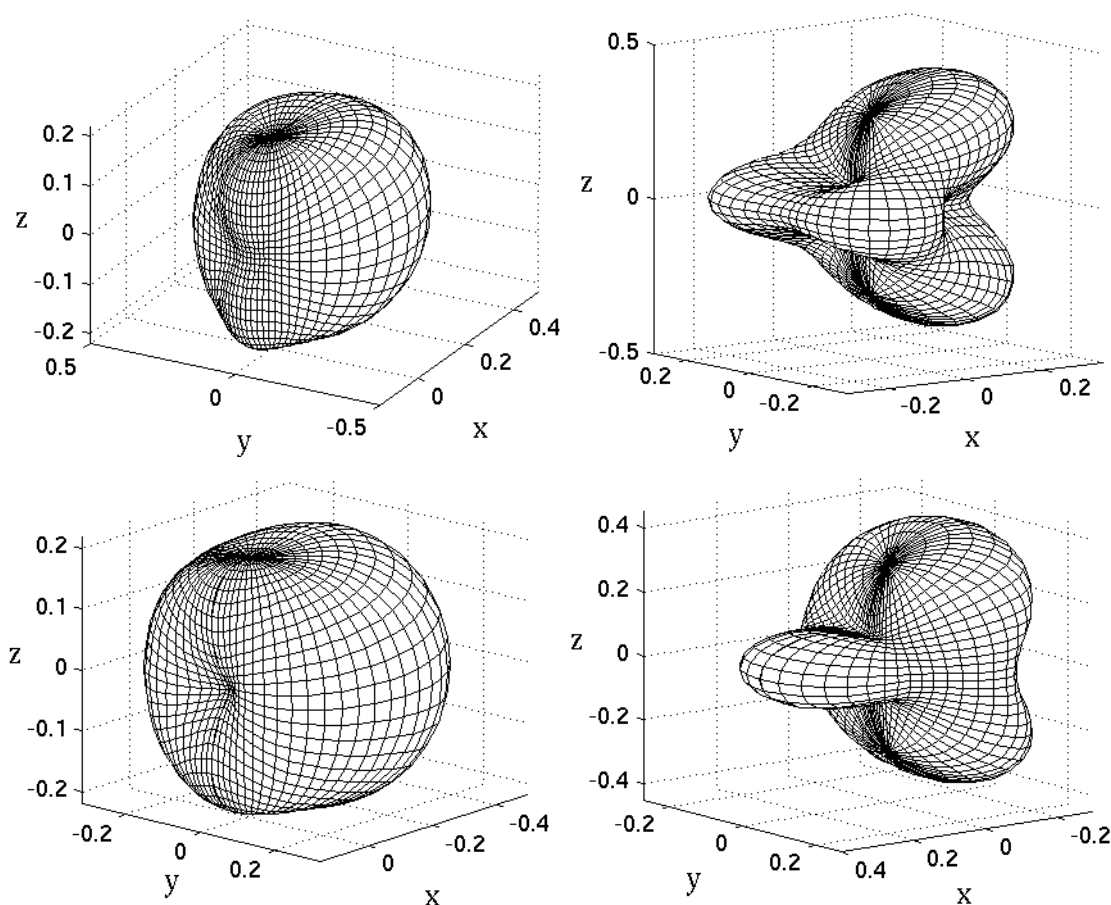


Рис. 4.11: Томографические компоненты обобщённого вернеровского состояния частицы со спином $3/2$, соответствующие значениям: $p = -\frac{1}{6}, b = \frac{1}{4}$ (сверху) и $p = -\frac{1}{6}, b = -\frac{1}{4}$ (снизу) представленные как функции на сфере. Рисунки слева соответствуют компоненте томограммы с $m = 3/2$, а справа - с $m = 1/2$.

Аналогично тому, как для обычного вернеровского состояния частицы со спином $3/2$ была построена поверхность 4.7, рассмотрим аналогичную конструкцию и в для обоб-

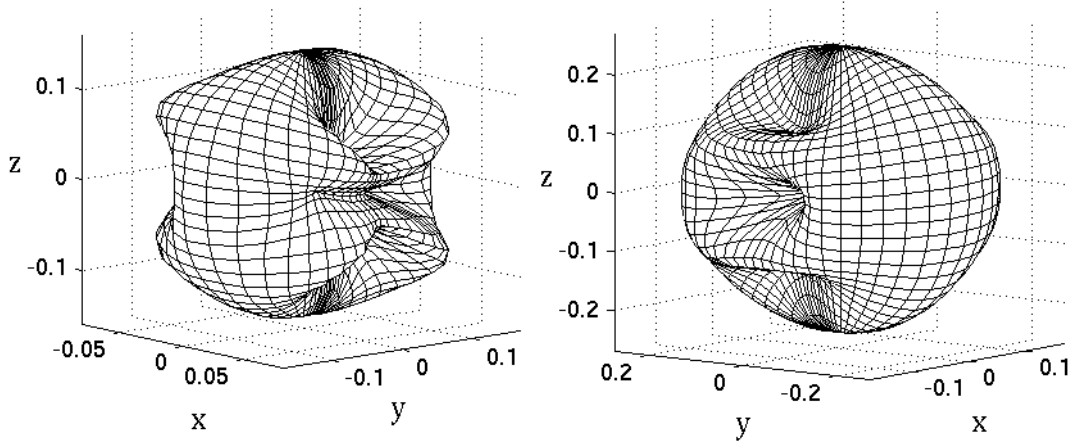


Рис. 4.12: Расность между томографической энтропией и её минимумом качественно разного вида для обобщённого вернеровского состояния частицы со спином $3/2$, соответствующая параметрам состояния $p = -\frac{1}{6}, b = \frac{1}{4}$ (слева) и $p = -\frac{1}{6}, b = \frac{1}{4}$ (справа).

щённого вернеровского состояния. Рассмотрим поверхность, параметризуемую параметрами (α, β) и соответствующую первым трём компонентам томограммы обобщённого вернеровского состояния: $x = \omega_{\rho_W(p,b)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$, $y = \omega_{\rho_W(p,b)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$, $z = \omega_{\rho_W(p,b)}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$. Данная поверхность изображена на Рис. 4.13 для параметров состояния $p = \frac{1}{3}, b = 0.1$.

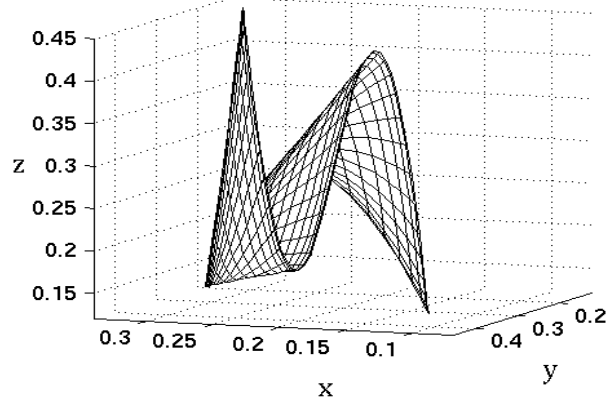


Рис. 4.13: Трёхмерная поверхность, задаваемая первыми 3-мя компонентами томограммы: $x = \omega_{\rho_W(\frac{1}{3},0.1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$, $y = \omega_{\rho_W(\frac{1}{3},0.1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$, $z = \omega_{\rho_W(\frac{1}{3},0.1)}^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$

Экстремальные значения фон-ноймановской и томографической энтропий приведены на Рисс. 4.14, 4.15 и 4.16.

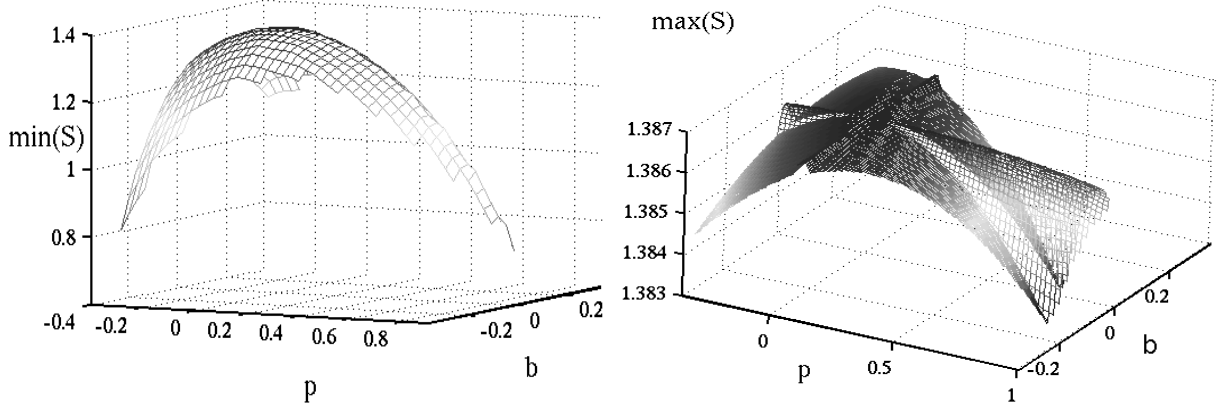


Рис. 4.14: Минимум (слева) и максимум (справа) томографической энтропии $S_{\rho_W(p,b)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ обобщённого вереновского состояния частицы со спином $3/2$ как функция параметров состояния p и b .

4.5 Состояние Вернера системы двух спинов

Пользуясь общей формулой для нахождения томограмм сложных систем (1.40), можно найти общий вид томограммы квантовой системы двух спинов, которая имеет вид:

$$\begin{aligned}
\omega(+, +, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &= \rho_{11} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{22} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{33} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} + \\
&+ \rho_{44} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \sin \beta_2 \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re}(\rho_{12} e^{i\alpha_2}) + \sin \beta_1 \cos^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re}(\rho_{13} e^{i\alpha_1}) + \\
&+ \frac{1}{2} \sin \beta_1 \sin \beta_2 (\operatorname{Re}(\rho_{14} e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}) + \operatorname{Re}(\rho_{23} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)})) + \\
&+ \sin \beta_1 \sin^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re}(\rho_{24} e^{i\alpha_1}) + \sin \beta_2 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re}(\rho_{34} e^{i\alpha_2}), \\
\omega(+, -, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &= \rho_{11} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{22} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{33} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \\
&+ \rho_{44} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} - \sin \beta_2 \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re}(\rho_{12} e^{i\alpha_2}) + \sin \beta_1 \sin^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re}(\rho_{13} e^{i\alpha_1}) - \\
&- \frac{1}{2} \sin \beta_1 \sin \beta_2 (\operatorname{Re}(\rho_{14} e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}) + \operatorname{Re}(\rho_{23} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)})) + \\
&+ \sin \beta_1 \cos^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re}(\rho_{24} e^{i\alpha_1}) - \sin \beta_2 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re}(\rho_{34} e^{i\alpha_2}), \\
\omega(-, +, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &= \rho_{11} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{22} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{33} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} + \\
&+ \rho_{44} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \sin \beta_2 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re}(\rho_{12} e^{i\alpha_2}) - \sin \beta_1 \cos^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re}(\rho_{13} e^{i\alpha_1}) - \\
&- \frac{1}{2} \sin \beta_1 \sin \beta_2 (\operatorname{Re}(\rho_{14} e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}) + \operatorname{Re}(\rho_{23} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)})) - \\
&- \sin \beta_1 \sin^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re}(\rho_{24} e^{i\alpha_1}) + \sin \beta_2 \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re}(\rho_{34} e^{i\alpha_2}), \\
\omega(-, -, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &= \rho_{11} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{22} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{33} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \\
&+ \rho_{44} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} - \sin \beta_2 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re}(\rho_{12} e^{i\alpha_2}) - \sin \beta_1 \sin^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re}(\rho_{13} e^{i\alpha_1}) + \\
&+ \frac{1}{2} \sin \beta_1 \sin \beta_2 (\operatorname{Re}(\rho_{14} e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}) + \operatorname{Re}(\rho_{23} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)})) - \\
&- \sin \beta_1 \cos^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re}(\rho_{24} e^{i\alpha_1}) - \sin \beta_2 \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re}(\rho_{34} e^{i\alpha_2}).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

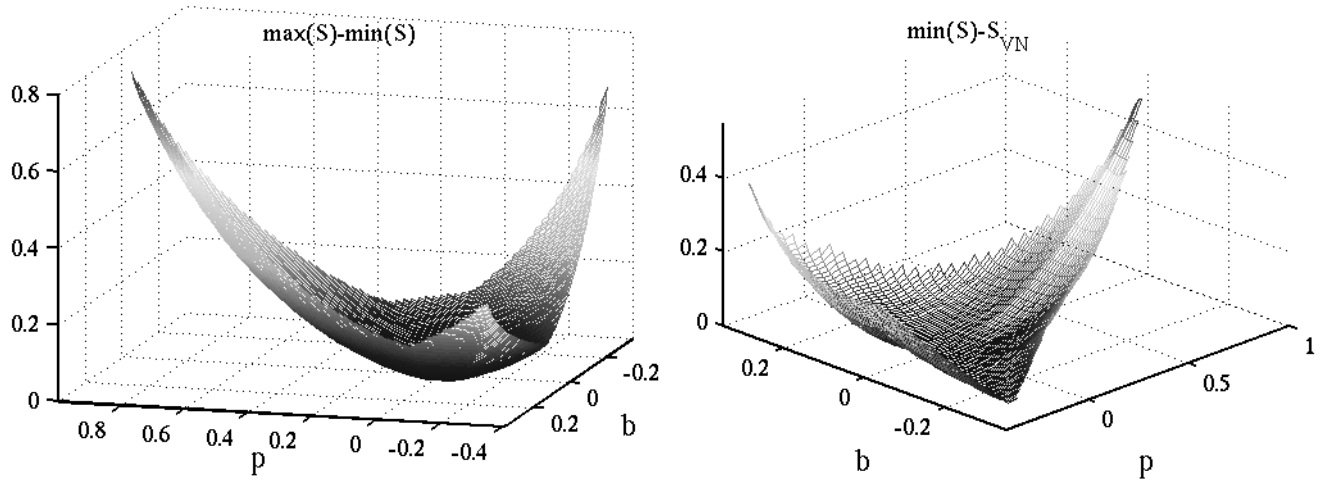


Рис. 4.15: Разность между максимумом и минимумом томографической энтропии $S_{\rho_W(p,b)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ (слева) и разность между минимумом томографической энтропии $S_{\rho_W(p,b)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ и фонной мановской энтропией ${}^{VN}S_{\rho_W(p,b)}^{(\frac{3}{2})}$ (справа) для обобщённого вернеровского состояния частицы со спином $3/2$ как функция параметров состояния p и b .

В случае состояния Вернера системы двух спинов с матрицей плотности (4.9) данная томограмма выглядит как

$$\begin{aligned} \omega_{\rho_W(p)}(+, +, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &= \omega(-, -, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \\ &= \frac{1}{4} (1 + p(\cos \beta_1 \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2))) \\ \omega_{\rho_W(p)}(+, -, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &= \omega(-, +, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \\ &= \frac{1}{4} (1 + p(\cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2))). \end{aligned}$$

Томографическая энтропия для вернеровского состояния системы двух спинов $1/2$ может быть вычислена численно по формуле (1.41). Поскольку томограмма любого состояния системы двух спинов $1/2$ является функцией на двух сферах, её график можно изобразить как семейство поверхностей, вид которых зависит от движения по некоторой сфере существенно большего радиуса. В таком случае одна пара углов в томографической энтропии задаёт точку на большой сфере, другая же пара углов задаёт собственно поверхность (расстояние от выбранной точки на большой сфере до точки малой поверхности соответствует значению томографической энтропии). График томографической энтропии для $p = 1$ приведён на Рис. 4.17.

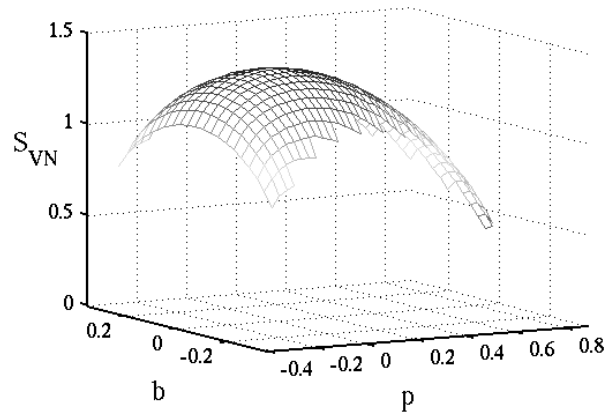


Рис. 4.16: Энтропия фон Ноймана ${}^{VN}S_{\rho_W(p,b)}^{(\frac{3}{2})}$ для обобщённого вернеровского состояния чатсицы со спином $3/2$ как функция параметров состояния p и b .

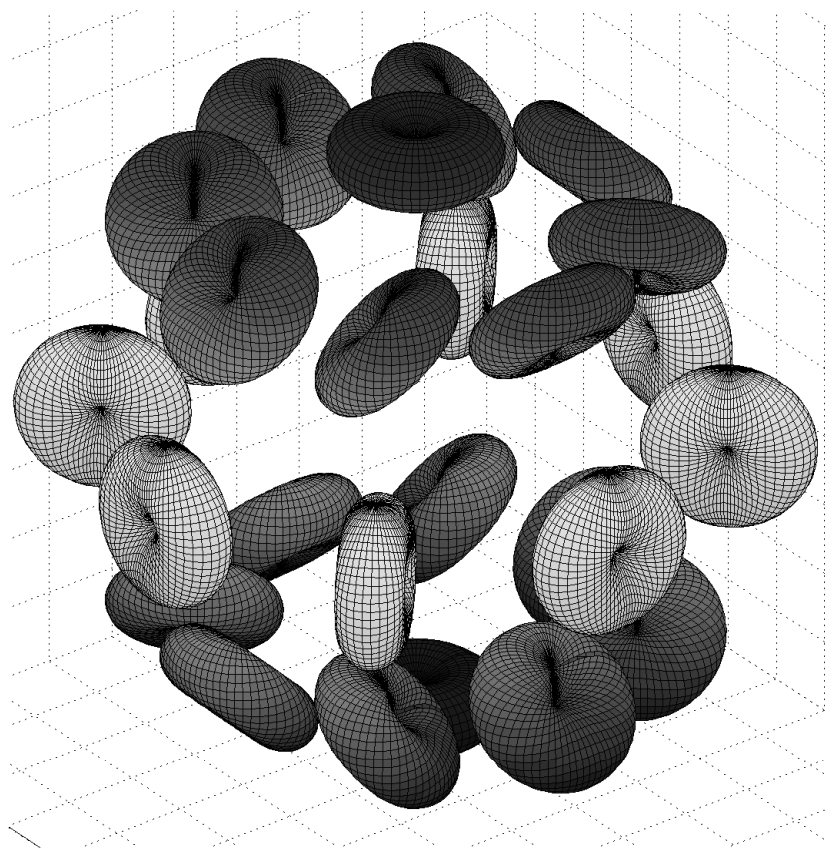


Рис. 4.17: Томографическая энтропия состояния Вернера для системы двух спинов $1/2$ как функция на двух сферах. Ось x направлена из рисунка направо, ось y - налево, ось z - снизу вверх.

Заключение

Настоящая работа посвящена развитию томографических методов в классической и квантовой механиках. В рамках томографического подхода были решены три задачи, которые могут быть применены к решению проблемы запутанности квантовых состояний, а также способствуют пониманию квантовой механики.

В первой задаче, посвящённой развитию техники звёздочного произведения в томографическом представлении, были найдены томографические символы координаты и импульса, а также произведения их произвольных целых степеней. Было показано, что средние значения физических величин как в квантовых, так и в классических системах могут быть вычислены одним и тем же способом, а именно, с помощью коммутативного ядра звёздочного произведения классических символов. В частности, были найдены в явной проинтегрированной форме классические ядра звёздочного произведения для томографических символов и матриц операторов в координатном представлении.

Другие две задачи были посвящены исследованию явления запутанности в квантовых системах.

Во второй задаче была найдена эволюция запутанности изначально сепарабельного и изначально запутанного состояния в системе, эволюционирующей как двумерный квантовый осциллятор с трением и переменной частотой. В качестве сепарабельного состояния было рассмотрено когерентное состояние осциллятора, а в качестве запутанного состояния было рассмотрено гауссовское состояние, содержащее перекрёстный член с произведением координат в экспоненте волновой функции. Показано, что в данном случае изначально сепарабельное состояние остаётся сепарабельным с течением времени, а изначально запутанное состояние остаётся запутанным. Также был рассмотрен пример квантовой системы с квадратичным гамильтонианом, содержащим член с перекрёстным произведением операторов координат, который приводит к переходу сепарабельного состояния в запутанное, и запутанного в сепарабельное.

В третьей задаче, посвящённой исследованию томографических характеристик спиновых систем, были получены общие формулы для томографической вероятности произвольных квантовых состояний со спином 1 и $3/2$, и состояний системы двух спинов $1/2$. Также были построены и описаны графики томографических характеристик некоторых квантовых состояний указанных систем. На примере состояния Вернера системы двух спинов $1/2$ было продемонстрировано отсутствие качественных изменений поведения томографических характеристик состояния при переходах между сепарабельными и запутанными состояниями.

По мнению автора, результаты, полученные в данной работе, представляют научный интерес. В дальнейшем планируется более тщательное исследование томографических методов в применении к ряду задач, представляющих научную и практическую ценность.

Благодарности

Автор выражает благодарность Манько Владимиру Ивановичу и Напартовичу Анатолию Петровичу за научное руководство и помощь в решении поставленных задач, а также Зборовскому Вадиму Гарольдовичу за сотрудничество и плодотворные обсуждения ряда вопросов.

Литература

- [1] П. А. М. Дирак, *Собрание научных трудов. Т. 1. Квантовая теория (монографии, лекции)*, Физматлит, Москва (2002).
- [2] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва (1968).
- [3] E. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**, 749 (1932).
- [4] K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.*, **23**, 264 (1940).
- [5] R. J. Glauber, *Phys. Rev. Lett*, **10**, 84 (1963); *Phys. Rev.*, **131**, 2766 (1963).
- [6] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett*, **10**, 177 (1963).
- [7] J. Bertrand and P. Bertrand, *Found. Phys.*, **17**, 397 (1987).
- [8] J. Radon, "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten", *Berichte Sachsische Akademie der Wissenschaften, Leipsig, Mathematische-Physikalische Klasse*, **69** (1917), S. 262.
- [9] K. Vogel and H. Risken, *Phys. Rev A*, **40**, 2847 (1989).
- [10] V. I. Man'ko and R. V. Mendes, *Phys. Lett. A*, **263**, 53 (1999).
- [11] S. Mancini, V. I. Manko and P. Tombesi, *Phys. Lett. A*, **213**, 1 (1996).
- [12] S. Mancini, V. I. Manko and P. Tombesi, *Found. Phys.*, **27**, 801 (1997).
- [13] V. I. Man'ko and O. V. Man'ko, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **112**, 796 (1997); [*JETP*, **85**, 430 (1997)].
- [14] V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, A. Stern, E. C. G. Sudarshan, F. Ventriglia, *Phys. Lett. A*, **351**, 1 (2006);

- [15] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften*, **23**, 807 (1935).
- [16] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan and F. Zaccaria, *Phys. Lett. A*, **327**, 353 (2004).
- [17] V. N. Chernega, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, O. V. Pilyavets, and V. G. Zborovskii, *J. Russ. Laser Res.*, **27**, 132 (2006).
- [18] V. I. Man'ko, and O. V. Pilyavets, *J. Russ. Laser Res.*, **26**, 259 (2005);
- [19] V. V. Dodonov, *Phys. Lett. A*, **213**, 219 (1996).
- [20] V. V. Dodonov, A. B. Klimov and V. I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **149**, 225 (1990); *J. Sov. Laser Research*, **12**, 439 (1991).
- [21] V. V. Dodonov, A. B. Klimov and D. E. Nikonov, *J. Math. Phys.*, **34**, 2742 (1993).
- [22] O. V. Man'ko and V. I. Man'ko, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **36**, 137 (2006).
- [23] V. V. Dodonov and A. B. Klimov, *Phys. Lett. A*, **167**, 309 (1992); *J. Sov. Laser Research*, **13**, 230 (1992).
- [24] J. S. Bell, *Physics*, **1**, 195 (1964).
- [25] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, "Classical mechanics is not $\hbar \rightarrow 0$ limit of quantum mechanics", Los Alamos ArXiv quant-ph/0407183 (2004).
- [26] O. V. Man'ko and V. I. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **18**, 407 (1997); **21**, 411 (2000).
- [27] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover (1932).
- [28] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, R. Vilela Mendes, "A probabilistic operator symbol framework for quantum information", Los Alamos ArXiv quant-ph/0602189 (2006).
- [29] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, and O. V. Pilyavets, *J. Russ. Laser Res.*, **26**, 429 (2005);
- [30] A. I. Lvovsky, H. Hansen, T. Aichele, O. Benson, J. Mlynek, S. Schiller, "Quantum state reconstruction of the single-photon Fock state", Los Alamos ArXiv quant-ph/0101051 (2001).
- [31] Yu-xi Liu, L. F. Wei, Franco Nori, "Tomographic measurements on superconducting qubit states", Los Alamos ArXiv quant-ph/0407197 (2005).

- [32] S. A. Babichev, J. Appel, A. I. Lvovsky, "Homodyne tomography characterization and nonlocality of a dual-mode optical qubit", Los Alamos ArXiv quant-ph/0312135 (2005).
- [33] V. I. Man'ko and R. V. Mendes, *Physica D*, **145**, 330 (2000).
- [34] J. G. Muga and R. F. Snider, *Europhys. Lett.*, **19**, 569 (1992).
- [35] V. I. Man'ko, in: V. V. Dodonov and V. I. Man'ko (eds.), *Theory of Nonclassical States of Light*, Taylor & Francis, London & New York (2003), p. 219.
- [36] Y. M. Shirokov, *Teor. Mat. Fiz.*, **28**, 308 (1976) [*Theor. Math. Phys.*, **28**, 806 (1976)].
- [37] S. L. Stratonovich, *Sov. Phys.–JETP*, **4**, 891 (1957).
- [38] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, and G. Marmo, *Phys. Scr.*, **62**, 446 (2000).
- [39] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, and G. Marmo, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**, 699 (2002).
- [40] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, and G. Marmo, in: E. Kapuscik and A. Horzela (eds.), *Proceedings of the Second International Symposium on Quantum Theory and Symmetries* (Krakow, 18–21 July 2001), World Scientific, Singapore (2002), p. 126.
- [41] V. I. Man'ko, G. Marmo, and P. Vitale, *Phys. Lett. A*, **334**, 1 (2005).
- [42] S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, *Quantum Semiclass. Opt.*, **7**, 615 (1995).
- [43] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **239**, 335 (1997).
- [44] S. Mancini, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**, 3461 (2001).
- [45] A. B. Klimov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, Yu. F. Smirnov, and V. N. Tolstoy, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**, 6101 (2002).
- [46] V. A. Andreev, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, and S. S. Safonov, *J. Russ. Laser Res.*, **19**, 340 (1998).
- [47] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, and S. S. Safonov, *Theor. Math. Phys.*, **115**, 185 (1998).
- [48] V. I. Man'ko and S. S. Safonov, *Yad. Fiz.*, **4**, 658 (1998).
- [49] V. A. Andreev and V. I. Man'ko, *JETP*, **87**, 239 (1998).

- [50] O. Castaños, R. López-Peña, M. A. Man'ko and V. I. Man'ko, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**, 4677 (2003); **37**, 8529 (2004); *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **5**, 227 (2003).
- [51] M. A. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **22**, 168 (2001);
S. De Nicola, R. Fedele, M. A. Man'ko, and V. I. Man'ko, *Eur. Phys. J. B*, **36**, 385 (2003);
J. Russ. Laser Res., **25**, 1 (2004).
- [52] A. J. Bracken and J. G. Wood, *Europhys. Lett.*, **68**, 1 (2004); "Nonpositivity of Groenewold operator" Los Alamos ArXiv quant-ph/0407052 (2004); A. J. Bracken, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**, L329 (2003).
- [53] O. Castanos, R. Lopez-Pena, M. A. Man'ko and V. I. Man'ko, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**, 4677 (2003).
- [54] H. Groenewold, *Physica*, **12**, 405 (1946).
- [55] J. E. Moyal, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **45**, 99 (1949).
- [56] V. I. Man'ko, V. A. Sharapov, E. V. Shchukin, "Probability representation of kinetic equation for open quantum system", Los Alamos ArXiv quant-ph/0305119 (2003).
- [57] O. V. Man'ko, "Quantum Tomography and Classical Propogator for Quadratic Quantum Systems", Preprint IC/99/16 ICTP, Trieste (1996). **24**, 180 (2003).
- [58] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика 3*, Наука, Москва (1989).
- [59] O. V. Man'ko and V. I. Man'ko, *J. Russ Laser Res.*, **25**, 115 (2004);
Olga V. Man'ko, On Entropy and Information of Quantum States, Contribution to the International Conference "New Trends in Quantum Mechanics. Fundamental Aspects and Applications"(University of Palermo, Italy, November 2005); *Open Systems & Inform. Dynam.* (2006, in press).
- [60] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, G. Marmo, Anil Shaji, E. C. G. Sudarshan and F. Zaccaria, *Phys. Lett. A*, **339**, 194 (2005).
- [61] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4277 (1996).
- [62] P. Horodecki, *Phys. Lett. A*, **232**, 333 (1997).
- [63] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Обобщённые функции*, Физматлит, Москва (1958).

- [64] K. Husimi, *Prog. Theor. Phys.*, **9**, 381 (1953).
- [65] P. Caldirola, *Nuovo Cimento*, **18**, 393 (1941).
- [66] E. Kanai, *Progr. Theor. Phys.*, **3**, 440 (1948).
- [67] В. В. Додонов и В. И. Манько, *Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем, труды Физического Института Академии Наук им. Лебедева*, Наука, Москва (1987), том 183.
- [68] R. F. Werner, *Phys. Rev. A*, **40**, 4277 (1989).
- [69] O. V. Man'ko, Talk at the International Workshop "Classical and Quantum Integrable Systems"(January 2005, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow Region, Russia); A. V. Andreev, V. I. Man'ko, O. V. Man'ko, and E. V. Shchukin, *Theor. Math. Phys.*, **146**, 140 (2006).