Mécanique Quantique 1 —– CORRIGÉ

Séance d'éxercices 10 : Composition de moments cinétiques

Rappel

— Soit $\mathbf{J}$, un opérateur moment cinétique quelconque. Il vérifie nécessairement les relations suivantes :

$$J_z \left|jm_j\right\rangle = \hbar m_j \left|jm_j\right\rangle, \tag{1}$$
$$\mathbf{J}^2 \left|jm_j\right\rangle = \hbar^2 j(j+1) \left|jm_j\right\rangle, \tag{2}$$

avec $-j \leq m_j \leq j$.

— On peut définir les opérateurs élévateur et abaisseur de la manière suivante :

$$J_+ = J_x + \mathrm{i}J_y, \tag{3}$$
$$J_- = J_x - \mathrm{i}J_y, \tag{4}$$

où

$$J_\pm \left|jm_j\right\rangle = \hbar\sqrt{j\left(j+1\right) - m_j\left(m_j \pm 1\right)} \left|jm_j \pm 1\right\rangle. \tag{5}$$

En inversant les équations (3) et (4), on trouve

$$J_x = \frac{J_+ + J_-}{2}, \tag{6}$$
$$J_y = \frac{J_+ - J_-}{2\mathrm{i}}. \tag{7}$$

— Pour la somme de deux moments cinétiques $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, on obtient la relation triangulaire

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2, \tag{8}$$

avec la condition

$$j_1 + j_2 + j \ \text{ entier.} \tag{9}$$

Les inégalités (8) sont exactement équivalentes aux inégalités (cf. cours page 127)

$$|j - j_2| \leq j_1 \leq j + j_2, \tag{10}$$

et

$$|j - j_1| \leq j_2 \leq j + j_1, \tag{11}$$

toujours avec la condition (9).

— Soit $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, et les nombres quantiques associés J, M, j_1, m_1, j_2 et m_2 : les vecteurs propres normés de l'ECOC $\left\{J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}\right\}$, donnés par $|j_1m_1j_2m_2\rangle = |j_1m_1\rangle \otimes |j_2m_2\rangle$, et les vecteurs propres normés de l'ECOC $\left\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\right\}$, donnés par $|j_1j_2JM\rangle$, sont alors liés par les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$|j_1j_2JM\rangle = \sum_{m_1,m_2} (j_1j_2m_1m_2|JM) \left|j_1m_1j_2m_2\right\rangle, \tag{12}$$

où nous utilisons la notation

$$(j_1 j_2 m_1 m_2|JM) \equiv \langle j_1 m_1 j_2 m_2|j_1 j_2 JM\rangle,$$

avec la relation d'unitarité

$$\sum_{J,M} (j_1 j_2 m_1 m_2|JM) \left(j_1 j_2 m_1' m_2'|JM\right) = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}. \tag{13}$$

— Le coefficient $3jm$:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} (2j_3 + 1)^{-1/2} (j_1 j_2 m_1 m_2|j_3 - m_3), \tag{14}$$

avec des propriétés de symétrie :

(a) Changement de signe avec la phase $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ lors d'une permutation de deux colonnes :

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

(b) Ils sont invariants pour toute permutation circulaire

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

(c) Ils changent de signe avec la phase $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ lorsque l'on change les signes des trois projections m_1, m_2 et m_3.

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Cela implique aussi que

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{si } j_1 + j_2 + j \text{ est impair.} \tag{18}$$

Question 1.

Relations triangulaires.

(a) *Donner les résultats des compositions suivantes*

i. $1 \oplus 1$

ii. $3/2 \oplus 5$

iii. $3/2 \oplus 5/2$

iv. $0 \oplus 4$

v. $5/2 \oplus 5/2$

(b) *Les relations triangulaires suivantes sont-elles satisfaites pour ces couples* (j_1, j_2, j) *?*

i. $(3, 5, 1)$

ii. $(0, 4, 4)$

iii. $(3/2, 3/2, 3/2)$

iv. $(5/2, 2, 1/2)$

v. $(3, 3/2, 1/2)$

(c) *Résoudre :*

i. $7/2 \oplus 3/2 = J$

ii. $J \oplus 3 = 2$

iii. $7/2 \oplus J = 1$

iv. $J \oplus 0 = 5/2$

v. $6 \oplus J = 0$

(a) Il suffit d'utiliser les inégalités (8) pour trouver les résultats possibles des différentes compositions.

i. $J = 1 \oplus 1 \Rightarrow 0 \leq J \leq 2 \Rightarrow J \in \{0,\ 1,\ 2\}$.

ii. $J = 3/2 \oplus 5 \Rightarrow 7/2 \leq J \leq 13/2 \Rightarrow J \in \{7/2,\ 9/2,\ 11/2,\ 13/2\}$.

iii. $J = 3/2 \oplus 5/2 \Rightarrow 1 \leq J \leq 4 \Rightarrow J \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

iv. $J = 0 \oplus 4 \Rightarrow 4 \leq J \leq 4 \Rightarrow J = 4$.

v. $J = 5/2 \oplus 5/2 \Rightarrow 0 \leq J \leq 5 \Rightarrow J \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

(b) On utilise les mêmes inégalités, et on vérifie qu'elles sont bien satisfaites. De plus, il faut vérifier que la condition (9) est satisfaite.

i. $j_1 = 3,\ j_2 = 5 \Rightarrow 2 \leq j \leq 8$. Or $3 + 5 + 1 = 9$ est un entier, mais $2 \nleq 1$: PAS OK.

ii. $j_1 = 0,\ j_2 = 4 \Rightarrow 4 \leq j \leq 4$. Or $4 \leq 4 \leq 4$ et $0 + 4 + 4 = 8$ est un entier : OK.

iii. $j_1 = 3/2,\ j_2 = 3/2 \Rightarrow 0 \leq j \leq 3$. Or $0 \leq 3/2 \leq 3$, mais $3/2 + 3/2 + 3/2 = 9/2$ n'est pas un entier : PAS OK.

iv. $j_1 = 5/2,\ j_2 = 2 \Rightarrow 1/2 \leq j \leq 9/2$. Or $1/2 \leq 1/2 \leq 9/2$ et $5/2 + 2 + 1/2 = 5$ est un entier : OK.

v. $j_1 = 3,\ j_2 = 3/2 \Rightarrow 3/2 \leq j \leq 9/2$. Or $3 + 3/2 + 1/2 = 5$ est un entier, mais $3/2 \nleq 1/2$: PAS OK.

(c) On utilise les inégalités (8), (10) ou (11) suivant le cas que l'on considère.

i. $j = 7/2 \oplus 3/2 \Rightarrow 2 \leq j \leq 5 \Rightarrow j \in \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

ii. $j = 3 \oplus 2 \Rightarrow 1 \leq j \leq 5 \Rightarrow j \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

iii. $j = 7/2 \oplus 1 \Rightarrow 5/2 \leq j \leq 9/2 \Rightarrow j \in \{5/2,\ 7/2,\ 9/2\}$.

iv. $j = 0 \oplus 5/2 \Rightarrow 5/2 \leq j \leq 5/2 \Rightarrow j = 5/2$.

v. $j = 6 \oplus 0 \Rightarrow 6 \leq j \leq 6 \Rightarrow j = 6$.

Question 2.

Composition d'un moment cinétique orbital $\mathbf{L}$ et d'un spin $1/2$.

(a) Soit

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S},$$

où les opérateurs vectoriels $\mathbf{L}$ et $\mathbf{S}$ sont respectivement un moment cinétique orbital et un spin. Rechercher les états propres de l'observable $\mathbf{J}^2$ ("diagonaliser" $\mathbf{J}^2$ à partir de sa représentation dans la base des états $|lm_l\rangle \otimes |sm_s\rangle \equiv |lm_l sm_s\rangle$ avec $s = \frac{1}{2}$.)

(b) En tenant compte de la convention de Condon et Shortley, établir les formules des coefficients de Clebsch-Gordan $\left(l\, \frac{1}{2}\, m_l\, m_s | JM\right)$.

(a) D'après les relations (7) et (2), on voit que le moment cinétique orbital vérifie les relations

$$L_z |lm_l\rangle = \hbar m_l |lm_l\rangle , \tag{19}$$
$$\mathbf{L}^2 |lm_l\rangle = \hbar^2 l(l+1) |lm_l\rangle , \tag{20}$$

et le spin les relations

$$S_z |sm_s\rangle = \hbar m_s |sm_s\rangle , \tag{21}$$
$$\mathbf{S}^2 |sm_s\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |sm_s\rangle , \tag{22}$$

car $s = \frac{1}{2}$. Pour la suite, nous définissons $\hbar \equiv 1$. À partir des définitions (3) et (4), les opérateurs élévateurs (L_+, S_+) et abaisseurs (L_-, S_-) associés à chacun des deux moments cinétiques sont

$$L_+ = L_x + \mathrm{i}L_y, \tag{23}$$
$$L_- = L_x - \mathrm{i}L_y, \tag{24}$$

et

$$S_+ = S_x + \mathrm{i}S_y, \tag{25}$$
$$S_- = S_x - \mathrm{i}S_y. \tag{26}$$

En considérant $\hbar = 1$ dans l'équation (4), on voit que ces quatre opérateurs vérifient

$$L_\pm |lm_l\rangle = a_{l\pm} |lm_l \pm 1\rangle , \tag{27}$$
$$S_\pm |sm_s\rangle = a_{s\pm} |sm_s \pm 1\rangle , \tag{28}$$

où nous avons défini

$$a_{l\pm} \equiv \sqrt{l\,(l+1) - m_l\,(m_l \pm 1)}, \tag{29}$$
$$a_{s\pm} \equiv \sqrt{s\,(s+1) - m_s\,(m_s \pm 1)}. \tag{30}$$

Pour $s = \frac{1}{2}$ ($m_s = \frac{1}{2}$ ou $m_s = \frac{-1}{2}$), il est facile de vérifier que $a_{s\pm} = 1$.
On cherche les états propres de l'opérateur $\mathbf{J}^2$. Exprimons d'abord cet opérateur en fonction des deux moments cinétiques :

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2 &= (\mathbf{L}+\mathbf{S})^2 , \\ &= \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + \mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{L}, \\ &= \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2\,(L_xS_x + L_yS_y + L_zS_z) ,\end{aligned} \tag{31}$$

car $\mathbf{L}$ et $\mathbf{S}$ commutent. En utilisant les définition des opérateurs abaisseur et élévateur (équations (23), (24), (25) et (26)), on peut réécrire (31) :

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2\left(\frac{L_+ + L_-}{2}\frac{S_+ + S_-}{2} + \frac{L_+ - L_-}{2\mathrm{i}}\frac{S_+ - S_-}{2\mathrm{i}} + L_zS_z\right).$$

En développant, on trouve

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_zS_z &+ \frac{1}{2}\left(\cancel{L_+S_+} + L_+S_- + L_-S_+ + \cancel{L_-S_-}\right) \\ &- \frac{1}{2}\left(\cancel{L_+S_+} - L_+S_- - L_-S_+ + \cancel{L_-S_-}\right),\end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_zS_z + L_+S_- + L_-S_+.}$$

Pour trouver la représentation de l'opérateur $\mathbf{J}^2$ dans la base des états $|lm_l\rangle \otimes |sm_s\rangle$, il faut calculer les éléments de matrice de cet opérateur dans cette base, ces derniers étant donnés par :

$$\langle lm_lsm_s|\mathbf{J}^2|lm_l'sm_s'\rangle = \langle lm_lsm_s|\mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_zS_z + L_+S_- + L_-S_+|lm_l'sm_s'\rangle,$$

ou encore

$$\begin{aligned}\langle lm_lsm_s|\mathbf{J}^2|lm_l'sm_s'\rangle = \langle lm_lsm_s|\mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_zS_z|lm_l'sm_s'\rangle + \langle lm_lsm_s|L_+S_-|lm_l'sm_s'\rangle \\ + \langle lm_lsm_s|L_-S_+|lm_l'sm_s'\rangle.\end{aligned} \tag{32}$$

Le premier terme de (32) est facile à calculer à partir des équations (19), (20), (21) et (22), et vaut

$$\langle lm_lsm_s|\mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_zS_z|lm_l'sm_s'\rangle = \left(l(l+1) + \frac{3}{4} + 2m_l'm_s'\right)\langle lm_lsm_s|lm_l'sm_s'\rangle.$$

Comme les états $|lm_l\rangle \otimes |sm_s\rangle$ forment une base, ils sont orthonormés, et on a donc

$$\langle lm_lsm_s|\mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_zS_z|lm_l'sm_s'\rangle = \left(l(l+1) + \frac{3}{4} + 2m_lm_s\right)\delta_{m_lm_l'}\delta_{m_sm_s'}, \tag{33}$$

où on a enlevé les primes à m_l et m_s car cette relation n'est satisfaite que si $m_l = m_l'$ et $m_s = m_s'$. Le second terme de (32) est obtenu à partir des relations (27), (28), (29) et(30) :

$$\begin{aligned}\langle lm_lsm_s|L_+S_-|lm_l'sm_s'\rangle &= a_{l+}'\langle lm_lsm_s|l, m_l'+1, s, m_s'-1\rangle, \\ &= a_{l+}'\delta_{m_l,m_{l'}+1}\delta_{m_s,m_{s'}-1}.\end{aligned}$$

Or l'état $|l, m_l'+1, s, m_s'-1\rangle$ existe pour autant que $m_s' = \frac{1}{2}$ et donc $m_s' - 1 = \frac{-1}{2}$, on obtient donc

$$\langle lm_lsm_s|L_+S_-|lm_l'sm_s'\rangle = a_{l+}'\delta_{m_l,m_{l'}+1}\delta_{m_s,-1/2}. \tag{34}$$

De manière analogue, le troisième terme de (32) est obtenu à partir des relations (27), (28), (29) et (30) :

$$\begin{aligned}\langle lm_lsm_s|L_-S_+|lm_l'sm_s'\rangle &= a_{l-}'\langle lm_lsm_s|l, m_l'-1, s, m_s'+1\rangle, \\ &= a_{l-}'\delta_{m_l,m_{l'}-1}\delta_{m_s,m_{s'}+1}.\end{aligned}$$

Or l'état $|l', m_l'-1, s', m_s'+1\rangle$ existe pour autant que $m_s' = \frac{-1}{2}$ et donc $m_s'+1 = \frac{1}{2}$, on obtient donc

$$\langle lm_lsm_s|L_-S_+|l'm_l's'm_s'\rangle = a_{l-}'\delta_{m_l,m_{l'}-1}\delta_{m_s,1/2}. \tag{35}$$

Finalement, à partir des relations (33), (34) et (35), on trouve que les éléments de matrice de l'opérateur $\mathbf{J}^2$ dans la base des états $|lm_l\rangle \otimes |sm_s\rangle$ sont

$$\boxed{\begin{aligned}\langle lm_lsm_s|\mathbf{J}^2|lm_l'sm_s'\rangle = \left(l(l+1) + \frac{3}{4} + 2m_lm_s\right)\delta_{m_lm_l'}\delta_{m_sm_s'} \\ + a_{l+}'\delta_{m_l,m_{l'}+1}\delta_{m_s,-1/2} + a_{l-}'\delta_{m_l,m_{l'}-1}\delta_{m_s,1/2}.\end{aligned}} \tag{36}$$

Pour représenter ces éléments de matrice, il nous faut définir une convention. Le plus simple est de les représenter sous la forme d'une matrice carré de dimensions $2(2l+1)$ (m_s peut prendre deux valeurs et m_l peut prendre $2l+1$ valeurs car $-l \leq m_l \leq l$) :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} -l,-\frac{1}{2} & -l,+\frac{1}{2} & -l+1,-\frac{1}{2} & -l+1,+\frac{1}{2} & \cdots & \cdots & l,-\frac{1}{2} & l,+\frac{1}{2} \end{array} \\
\begin{array}{l} -l',-\frac{1}{2} \\ -l',+\frac{1}{2} \\ -l'+1,-\frac{1}{2} \\ -l'+1,+\frac{1}{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ l',-\frac{1}{2} \\ l',+\frac{1}{2} \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\
\cdots & \cdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
\cdots & \cdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\
\cdots & \cdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
\cdots & \cdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\
\cdots & \cdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
\cdots & \cdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots
\end{array}\right)
\end{array} \tag{37}$$

On voit donc que l'on a défini notre matrice de façon à ce que les lignes et les colonnes croissent respectivement avec la valeur de m'_l et la valeur de m_l. En outre, pour chaque valeur de m'_l (resp. m_l), on a deux lignes (resp. deux colonnes) correspondant aux deux valeurs $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ de m'_s (resp. de m_s).

Cherchons maintenant à exprimer la matrice en mettant en évidence ses éléments non nuls : :

— soit $m_l = m'_l$ et $m_s = m'_s$ et donc

$$\langle l m_l s m_s | \mathbf{J}^2 | l m'_l s m'_s \rangle = l(l+1) + \frac{3}{4} + 2 m_l m_s \tag{38}$$

— soit $m_l = m'_l + 1$ et $m_s = m'_s - 1 = \frac{-1}{2}$ et donc

$$\langle l m_l s m_s | \mathbf{J}^2 | l m'_l s m'_s \rangle = a'_{l+} = \sqrt{l\left(l+1\right) - m'_l\left(m'_l + 1\right)} \tag{39}$$

— soit $m_l = m'_l - 1$ et $m_s = m'_s + 1 = \frac{1}{2}$ et donc

$$\langle l m_l s m_s | \mathbf{J}^2 | l m'_l s m'_s \rangle = a'_{l-} = \sqrt{l\left(l+1\right) - m'_l\left(m'_l - 1\right)} \tag{40}$$

Ceci revient à dire que les éléments non nuls sont ceux qui vérifient $m_l + m_s = m'_l + m'_s = c^{te}$. Pour la suite, nous définissons $M \equiv m_l + m_s$ et $M' \equiv m'_l + m'_s$. Dès lors, on voit que la matrice (37) définie ci-dessus peut être réexprimée à partir de ces deux paramètres M et M' :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} M=-l-\frac{1}{2} & M=-l+\frac{1}{2} & \cdots & M=l-\frac{1}{2} & M=l+\frac{1}{2} \end{array} \\
\begin{array}{l} M'=-l'-\frac{1}{2} \\ M'=-l'+\frac{1}{2} \\ \vdots \\ M'=l'-\frac{1}{2} \\ M'=l'+\frac{1}{2} \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccc}
(\ldots) & 0\quad 0 & \cdots & 0\quad 0 & 0 \\
\begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} & \ddots & \mathcal{O}_{2x2} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\
\begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \mathcal{O}_{2x2} & \ddots & \mathcal{O}_{2x2} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\
\begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \ddots & \ddots & \begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\
0 & 0\quad 0 & 0\quad 0 & 0\quad 0 & (\ldots)
\end{array}\right)
\end{array} \tag{41}$$

où

$$\mathcal{O}_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice nulle 2x2. On voit qu'à part pour les valeurs extrêmes de M' et M, chaque valeur de M' (resp. de M) correspond à deux lignes (resp. deux colonnes). Sachant que $m'_s = \pm\frac{1}{2}$ (resp. $m_s = \pm\frac{1}{2}$), il existe 2 valeurs de m'_l (resp. m_l) pour $M' = c^{te}$ (resp. $M = c^{te}$). Par ailleurs, une telle représentation permet de bien mettre en évidence quels sont les éléments de la matrice qui seront non nuls (car nous avons vu que ces éléments étaient ceux tels que $M = M'$). Avant de considérer les valeurs extrêmes, étudions plus en détail les valeurs intermédiaires de M et M'. Chaque bloc $M = M' = c^{te}$ est de taille 2x2 car il existe seulement 4 possibilités pour obtenir $m_l + m_s = c^{te}$:

i. $m_l = m'_l$, $m_s = m'_s = \frac{1}{2}$;
ii. $m_l = m'_l + 1$, $m_s = m'_s - 1 = \frac{-1}{2}$;
iii. $m_l = m'_l - 1$, $m_s = m'_s + 1 = \frac{1}{2}$;
iv. $m_l = m'_l$, $m_s = m'_s = \frac{-1}{2}$.

Diagonaliser la matrice (41) revient à diagonaliser chacun des blocs. D'après (36), on voit que ces blocs peuvent être représentés par des matrices 2x2, que nous appelerons T, qui ont la forme suivante :

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \begin{array}{c} m_l = m'_l \\ m_s = \frac{1}{2} \end{array} & \begin{array}{c} m_l = m'_l + 1 \\ m_s = \frac{-1}{2} \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{c} m'_l, m'_s = \frac{1}{2} \\ m'_l + 1, m'_s = \frac{-1}{2} \end{array} & \begin{pmatrix} l(l+1) + \frac{3}{4} + 2m'_l\left(\frac{1}{2}\right) & \sqrt{l\left(l+1\right) - m'_l\left(m'_l+1\right)} \\ \sqrt{l\left(l+1\right) - m'_l\left(m'_l-1\right)} & l(l+1) + \frac{3}{4} + 2m'_l\left(\frac{-1}{2}\right) \end{pmatrix} \end{array}, \tag{42}$$

où nous avons remplacé a'_{l+} et a'_{l-} par leur valeur respective (équation (29)). Nous avons défini $M' \equiv m'_l + m'_s$, ce qui implique que $m'_l = M' - m'_s$. En injectant cette expression dans (42), on trouve :

$$T = \begin{pmatrix} l(l+1) + \frac{3}{4} + \left(M' - \frac{1}{2}\right) & \sqrt{l\left(l+1\right) - \left(M'-\frac{1}{2}\right)\left(M'+\frac{1}{2}\right)} \\ \sqrt{l\left(l+1\right) - \left(M'+\frac{1}{2}\right)\left(M'-\frac{1}{2}\right)} & l(l+1) + \frac{3}{4} - \left(M' + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix},$$

ou encore

$$T = \begin{pmatrix} l(l+1) + \frac{1}{4} + M & \sqrt{l\left(l+1\right) - \left(M-\frac{1}{2}\right)\left(M+\frac{1}{2}\right)} \\ \sqrt{l\left(l+1\right) - \left(M+\frac{1}{2}\right)\left(M-\frac{1}{2}\right)} & l(l+1) + \frac{1}{4} - M \end{pmatrix}.$$

Pour diagonaliser la matrice T, il suffit de trouver ses valeurs propres. En effet, quand une matrice est diagonale, ses valeurs sur la diagonale principale correspondent aux valeurs propres de cette matrice. On doit donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
&\det\left(T - \lambda\mathbb{I}\right) = 0, \\
\Leftrightarrow &\left(l(l+1) + \frac{1}{4} - \lambda + M'\right)\left(l(l+1) + \frac{1}{4} - \lambda - M'\right) - l\left(l+1\right) + \left(M' + \frac{1}{2}\right)\left(M' - \frac{1}{2}\right) = 0, \\
\Leftrightarrow &\left(l(l+1) + \frac{1}{4} - \lambda\right)^2 - \cancel{M'^2} - l\left(l+1\right) + \cancel{M'^2} - \frac{1}{4} = 0, \\
\Leftrightarrow &\left(l(l+1) + \frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(l(l+1) + \frac{1}{4}\right)\lambda + \lambda^2 - l\left(l+1\right) - \frac{1}{4} = 0, \\
\Leftrightarrow &\left(l(l+1)\right)^2 + \frac{1}{2}l(l+1) + \frac{1}{16} - \left(2l(l+1) + \frac{1}{2}\right)\lambda + \lambda^2 - l(l+1) - \frac{4}{16} = 0, \\
\Leftrightarrow &\lambda^2 - \lambda\left(2l(l+1) + \frac{1}{2}\right) + \left(l(l+1)\right)^2 - \frac{1}{2}l(l+1) - \frac{3}{16} = 0.
\end{aligned}$$

C'est une simple équation du second degré dont le discriminant vaut

$$
\begin{aligned}
\Delta = & \left(2l(l+1)+\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left((l(l+1))^2 - \frac{1}{2}l(l+1) - \frac{3}{16}\right), \\
& = \cancel{4\,(l(l+1))^2} + 2l(l+1) + \frac{1}{4} - \cancel{4\,(l(l+1))^2} + 2l(l+1) + \frac{3}{4}, \\
& = 4l(l+1)+1, \\
& = 4l^2+4l+1, \\
& = (2l+1)^2 .
\end{aligned}
$$

Les valeurs propres sont donc

$$\lambda_\pm = \frac{2l(l+1)+\frac{1}{2} \pm (2l+1)}{2},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lambda_- = l^2 - \frac{1}{4} = \left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l-\frac{1}{2}\right),} \tag{43}$$

et

$$\boxed{\lambda_+ = l^2 + 2l + \frac{3}{4} = \left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right).} \tag{44}$$

La matrice (42) peut donc s'écire :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} \left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l-\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & \left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right) \end{pmatrix}.}$$

En exprimant tous les blocs de cette façon, on voit bien (voir (42)) que la matrice a bien été complètement diagonalisée.

Nous allons maintenant calculer les états propres de J^2. Ce sont les états propres $|j_1 j_2 J M\rangle$ de l'ECOC $\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\}$ définis dans le rappel. Ils peuvent être calculés grâce à la formule (12) les liant aux états $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ par l'intermédiaire des coefficients de CLEBSCH-GORDAN. Pour les valeurs limites de M, un raisonnement simple permet de trouver les coefficients. Nous calculerons ensuite ces derniers pour les valeurs intermédiaires de M dans la question b).

Pour les valeurs limites : $M = \pm\left(l+\frac{1}{2}\right)$ (voir matrice (41))

— Si $M = -l - \frac{1}{2} \Rightarrow m_l = m'_l = -l$, $m_s = m'_s = \frac{-1}{2}$;

— Si $M = l + \frac{1}{2} \Rightarrow m_l = m'_l = l$, $m_s = m'_s = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, on sait que $J = l + s$, c'est-à-dire

$$J = l + \frac{1}{2}.$$

Nous avons dès lors

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |l m_l s m_s\rangle = |l, \pm l\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Dans ce cas-ci (valeurs intermédiaires de M), on voit qu'il n'y a pas d'éléments diagonaux dans la matrice initiale (matrice non-diagonalisée). La base propre correspond donc à la base dans laquelle on à calculé les éléments de la matrice initiale. Le coefficient de CLEBSCH-GORDAN est donc égal à 1, puisque

$$|j_1 j_2 J M\rangle = |l s J M\rangle = |l, \pm l\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle.$$

(b) Nous allons maintenant calculer les états propres pour les valeurs intermédiaires de M. Pour $-l-\frac{1}{2} < M < l+\frac{1}{2}$, on a des blocs 2x2 représentés par la matrice T. On sait que les valeurs propres d'un opérateur $\mathbf{J}^2$ sont du type $J(J+1)$. À partir des équations (43) et (44) , on peut identifier la valeur de J :

$$J = l \pm \frac{1}{2}. \tag{45}$$

Cherchons les vecteurs propres correspondants

$$|JM\rangle = a \left| l \ \underbrace{M+\frac{1}{2}}_{m_l=M-m_s} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \ \underbrace{\frac{-1}{2}}_{m_s} \right\rangle + b \left| l \ \underbrace{M-\frac{1}{2}}_{m_l=M-m_s} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \ \underbrace{\frac{1}{2}}_{m_s} \right\rangle.$$

On veut trouver les états propres, c'est-à-dire qu'il faut déterminer les composantes a et b telles que

$$T \begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix}.$$

On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} T_{11}a_\pm + T_{12}b_\pm &= \lambda_\pm a_\pm, \\ T_{21}a_\pm + T_{22}b_\pm &= \lambda_\pm b_\pm, \end{aligned}$$

ou encore, à partir de (42) :

$$\begin{aligned} \left(l(l+1)+\frac{1}{4}-M\right)a_\pm + \sqrt{l\,(l+1)+\frac{1}{4}-M^2}\,b_\pm &= \lambda_\pm a_\pm, \\ \sqrt{l\,(l+1)+\frac{1}{4}-M^2}\,a_\pm + \left(l(l+1)+\frac{1}{4}+M\right)b_\pm &= \lambda_\pm b_\pm. \end{aligned} \tag{46}$$

La condition de normalisation élimine un des degrés de libertés, donc il suffit de trouver la solution d'une des deux équations. On va résoudre la première équation.

i. Pour λ_+, c'est-à-dire $J = l+\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\left(l(l+1)+\frac{1}{4}-M-\left(l^2+2l+\frac{3}{4}\right)\right)a_+ + \sqrt{l\,(l+1)+\frac{1}{4}-M^2}\,b_+ = 0, \\ \Leftrightarrow &\left(-l-\frac{1}{2}-M\right)a_+ + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}+M\right)\left(l+\frac{1}{2}-M\right)}\,b_+ = 0, \\ \Rightarrow &b_+ = a_+\sqrt{\frac{(l+\frac{1}{2}+M)}{(l+\frac{1}{2}-M)}}. \end{aligned}$$

La condition de normalisation impose :

$$\begin{aligned} &a_+^2 + b_+^2 = 1, \\ \Leftrightarrow &\left(1+\frac{(l+\frac{1}{2}+M)}{(l+\frac{1}{2}-M)}\right)a_+^2 = 1, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{a_+ = \pm\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-M}{2l+1}}.} \tag{47}$$

et

$$\boxed{b_+ = \pm\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+M}{2l+1}},} \tag{48}$$

On peut choisir le signe qu'on veut pour a_+ car cela ne fait que rajouter une phase globale, qui n'est pas mesurable. Il faut tout de même faire attention car le choix du signe de a_+ fixe le signe de b_+. Ici, il faut prendre les deux mêmes signes pour a_+ et b_+. Nous choisissons donc

$$a_+ = \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+M}{2l+1}}, \tag{49}$$

$$b_+ = \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-M}{2l+1}}. \tag{50}$$

ii. Pour λ_-, c'est-à-dire $J = l - \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
&\left(l(l+1)+\frac{1}{4}-M-\left(l^2-\frac{1}{4}\right)\right)a_- + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}+M\right)\left(l+\frac{1}{2}-M\right)}b_- = 0,\\
\Leftrightarrow &\left(l+\frac{1}{2}-M\right)a_- + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}+M\right)\left(l+\frac{1}{2}-M\right)}b_- = 0,\\
\Leftrightarrow &b_- = -a_-\sqrt{\frac{(l+\frac{1}{2}-M)}{(l+\frac{1}{2}+M)}}.
\end{aligned}$$

La condition de normalisation impose :

$$\begin{aligned}
&a_-^2 + b_-^2 = 1,\\
\Leftrightarrow &\left(1+\frac{(l+\frac{1}{2}-M)}{(l+\frac{1}{2}+M)}\right)a_-^2 = 1,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{a_- = \mp\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+M}{2l+1}}.} \tag{51}$$

et

$$\boxed{b_- = \pm\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-M}{2l+1}},} \tag{52}$$

On peut choisir le signe qu'on veut pour a_- en faisant attention car le choix du signe de a_- fixe le signe de b_-. Ici, il faut prendre deux signes différents pour a_- et b_-. Nous choisissons donc :

$$a_- = \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+M}{2l+1}}, \tag{53}$$

$$b_- = -\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-M}{2l+1}}. \tag{54}$$

En utilisant les valeurs (49), (50), (53), (54) et la définition (12), on voit que les coefficient de Clebsch-Gordan sont :

$$(l \quad \frac{1}{2} \quad \underbrace{M \pm \frac{1}{2}}_{m_l} \quad \underbrace{\pm\frac{1}{2}}_{m_s}|\underbrace{l + \frac{1}{2}}_{J} \quad M) = \sqrt{\frac{l + \frac{1}{2} \pm M}{2l+1}}, \tag{55}$$

$$(l \quad \frac{1}{2} \quad \underbrace{M \pm \frac{1}{2}}_{m_l} \quad \underbrace{\mp\frac{1}{2}}_{m_s}|\underbrace{l - \frac{1}{2}}_{J} \quad M) = \pm\sqrt{\frac{l + \frac{1}{2} \pm M}{2l+1}}. \tag{56}$$