

## Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°10: Composition de moments cinétiques

## 1. Relations triangulaires.

(a) Donner les résultats des compositions suivantes

i.  $1 \oplus 1$

ii.  $3/2 \oplus 5$

iii.  $3/2 \oplus 5/2$

iv.  $0 \oplus 4$

v.  $5/2 \oplus 5/2$

(b) Les relations triangulaires suivantes sont-elles satisfaites?

i. 3, 5, 1

ii. 0, 4, 4

iii.  $3/2, 3/2, 3/2$

iv.  $5/2, 2, 1/2$

v. 3,  $3/2, 1/2$

(c) Résoudre

i.  $7/2 \oplus 3/2 = j$

ii.  $j \oplus 3 = 2$

iii.  $7/2 \oplus j = 1$

iv.  $j \oplus 0 = 5/2$

v.  $6 \oplus j = 0$

2. Composition d'un moment cinétique orbital  $l$  et d'un spin  $1/2$ .

(a) Soit

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

où les opérateurs vectoriels  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{S}$  sont respectivement un moment cinétique orbital et un spin. Rechercher les états propres de l'observable  $\mathbf{J}^2$  ("diagonaliser"  $\mathbf{J}^2$  à partir de sa représentation dans la base des états  $|lm_l\rangle \otimes |sm_s\rangle$  avec  $s = 1/2$ ).

(b) En tenant compte de la convention de Condon et Shortley, établir les formules des coefficients de Clebsch-Gordan ( $l \ 1/2 \ m_l \ m_s |jm\rangle$ ).(c) *Facultatif*: Vérifier les relations d'unitarité des coefficients de Clebsch-Gordan obtenus.

• **Opérateur élévateur et abaisseur**

$$\begin{aligned} J_+ &= J_x + iJ_y, \\ J_- &= J_x - iJ_y, \end{aligned} \quad (1)$$

où

$$J_{\pm} |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |jm \pm 1\rangle. \quad (2)$$

- Pour la **somme de deux moments cinétiques**  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$  on obtient la relation triangulaire

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2, \quad (3)$$

avec la condition  $j_1 + j_2 + j$  entier.

- **Les coefficient de Clebsch-Gordon:** Les vecteurs propres normés de l'ECOC  $\{J_1^2, J_{1x}, J_2^2, J_{2x}\}$ , donnés par  $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$  et les vecteurs propres normés de l'ECOC  $\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\}$ , donnés par  $|j_1 j_2 j m\rangle$  sont liés par les coefficients de Clebsch-Gordon:

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1, m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j m) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle, \quad (4)$$

où

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j m) \equiv \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle, \quad (5)$$

avec la relation d'unitarité

$$\sum_{j, m} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j m) (j_1 j_2 m'_1 m'_2 | j m) = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}. \quad (6)$$

- **Le coefficient  $3jm$ :**

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} (2j_3 + 1)^{-1/2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3 - m_3), \quad (7)$$

avec des **propriétés de symétrie:**

1. Changement de signe avec la phase  $(-1)^{j_1 + j_2 + j_3}$  lors d'une permutation de deux colonnes:

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

2. Ils sont invariants pour toute permutation circulaire

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

3. Ils changent de signe avec la phase  $(-1)^{j_1 + j_2 + j_3}$  lorsque l'on change les signes des trois projections  $m_1, m_2$  et  $m_3$ .

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Ca implique aussi que

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{si } j_1 + j_2 + j_3 \text{ est impair.} \quad (11)$$