Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°10: Composition de moments cinétiques

1. Addition de deux moments cinétiques.
   Soit $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2 \equiv \boldsymbol{J}_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \boldsymbol{J}_2$.
   Montrer que $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{J} = i\hbar\, \boldsymbol{J}$ et $\{\boldsymbol{J}^2, J_z, \boldsymbol{J}_1^2, \boldsymbol{J}_2^2\}$ forment un ECOC .

2. Relations triangulaires.
   (a) Donner les résultats des compositions suivantes
      i. $1 \oplus 1$
      ii. $3/2 \oplus 5$
      iii. $3/2 \oplus 5/2$
      iv. $0 \oplus 4$
      v. $5/2 \oplus 5/2$
   (b) Les relations triangulaires suivantes sont-elles satisfaites?
      i. 3, 5, 1
      ii. 0, 4, 4
      iii. 3/2, 3/2, 3/2
      iv. 5/2, 2, 1/2
      v. 3, 3/2, 1/2
   (c) Résoudre
      i. $7/2 \oplus 3/2 = j$
      ii. $j \oplus 3 = 2$
      iii. $7/2 \oplus j = 1$
      iv. $j \oplus 0 = 5/2$
      v. $6 \oplus j = 0$

3. Composition d'un moment cinétique orbital l et d'un spin 1/2.
   (a) Soit $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ où les opérateurs vectoriels $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{S}$ sont respectivement un moment cinétique orbital et un spin. Rechercher les états propres de l'observable $\boldsymbol{J}^2$ ("diagonaliser" $\boldsymbol{J}^2$ à partir de sa représentation dans la base des états $|lm_l\rangle \otimes |sm_s\rangle$ avec $s = 1/2$).
   (b) En tenant compte de la convention de Condon et Shortley, établir les formules des coefficients de Clebsch-Gordan $(l\ 1/2\ m_l\ m_s|jm)$.
   (c) *Facultatif:* Vérifier les relations d'unitarité des coefficients de Clebsch-Gordan obtenus.

---

http://quic.ulb.ac.be
Evgueni.Karpov@ulb.ac.be, aherz@ulb.ac.be, michael.jabbour@ulb.ac.be.

Liste des formules utiles (*chapitre 6 du syllabus de Daniel Baye*)

- **Opérateur élévateur et abaisseur**

$$\begin{aligned} J_+ &= J_x + iJ_y, \\ J_- &= J_x - iJ_y, \end{aligned} \tag{1}$$

  où

$$J_\pm \left|jm\right\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\left|jm\pm 1\right\rangle . \tag{2}$$

- Pour la **somme de deux moments cinétiques $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$** on obtient la relation triangulaire

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2, \tag{3}$$

  avec la condition $j_1 + j_2 + j$ entier.

- **Les coefficient de Clebsch-Gordon:** Les vecteurs propres normés de l'ECOC $\{J_1^2, J_{1x}, J_2^2, J_{2x}\}$, donnés par $|j_1m_1j_2m_2\rangle = |j_1m_1\rangle \otimes |j_2m_2\rangle$ et les vecteurs propres normés de l'ECOC $\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\}$, donnés par $|j_1j_2jm\rangle$ sont liés par les coefficients de Clebsch-Gordon:

$$\left|j_1j_2jm\right\rangle = \sum_{m_1,m_2} (j_1j_2m_1m_2|jm) \left|j_1m_1j_2m_2\right\rangle , \tag{4}$$

  où

$$(j_1j_2m_1m_2|jm) \equiv \left\langle j_1m_1j_2m_2|j_1j_2jm\right\rangle , \tag{5}$$

  avec la relation d'unitarité

$$\sum_{j,m}(j_1j_2m_1m_2|jm)(j_1j_2m_1'm_2'|jm) = \delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}. \tag{6}$$

- **Le coefficient $3jm$:**

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2-m_3}(2j_3+1)^{-1/2}(j_1j_2m_1m_2|j_3 - m_3), \tag{7}$$

  avec des **proprietés de symétrie:**

  1. Changement de signe avec la phase $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ lors d'une permutation de deux colonnes:

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

  2. Ils sont invariants pour toute permutation circulaire

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

  3. Ils changent de signe avec la phase $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ lorsque l'on change les signes des trois projections m_1,m_2 et m_3.

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

     Ca implique aussi que

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{si } j_1 + j_2 + j_3 \text{ est impair.} \tag{11}$$