

## Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°10: Effet Zeeman sur la structure fine de l'atome d'hydrogène

Écrivons l'hamiltonien de structure fine d'un atome d'hydrogène dans un champ magnétique homogène et constant sous la forme

$$H = H_0 + W_{so} + W_Z.$$

Dans cette expression, l'hamiltonien non perturbé est

$$H_0 = \frac{p^2}{2m_e} + V(r), \quad V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

le terme de couplage spin-orbite est

$$W_{so} = \frac{1}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S},$$

où  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{S}$  sont respectivement le moment cinétique orbital et le spin de l'électron, et le terme Zeeman est

$$W_Z = \frac{e}{2m_e} B(L_z + g_e S_z),$$

où  $g_e \approx 2$  est le facteur gyromagnétique de l'électron, et  $\mathbf{B} = B\mathbf{1}_z$  est le champs magnétique.

1. Écrire  $H$  dans le système d'unités  $\hbar = 2m_e = a_0 = e = 1$ .
2. Proposer des ECOC pour  $H_0$ ,  $H_0 + W_{so}$  et  $H_0 + W_Z$ .
3. Étudier la validité de la méthode des perturbations pour les atomes à faible excitation (le nombre quantique principale  $n < 10$ ).
4. Exprimer les éléments matriciels des opérateurs  $H_0 + W_{so}$  et  $H_0 + W_Z$  dans les états de base de leur ECOC respectif.
5. Pour les couches  $n = 1$  et  $n = 2$ , calculer les corrections des énergies au premier ordre en traitant d'abord  $W_Z$  comme une perturbation. Refaire la même chose en traitant cette fois  $W_{so}$  comme une perturbation.
6. Calculer les énergies de  $H$  au premier ordre des perturbations.

7. Étudier analytiquement les cas limites  $B \rightarrow 0$  et  $B \rightarrow \infty$  et les interpréter physiquement. Déterminer les états propres à l'ordre zéro dans ces cas et interpréter les résultats.

RAPPEL

- Rayon de Bohr :

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.529 \times 10^{-10} m.$$

- Constante de structure fine :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

- Les fonctions radiales d'une particule de masse  $m_e$  et de charge  $-e$  attirée par une charge  $Ze$  sont:

$$R_{n_r l}(r) = \frac{2Z^{3/2}}{n^2} \frac{1}{(2l+1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!}{n_r!}} \left(\frac{2Zr}{n}\right)^l {}_1F_1\left(-n_r, 2l+2, \frac{2Zr}{n}\right) e^{-Zr/n}$$

$${}_1F_1(a, c, z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$n = n_r + l + 1$$

où  $n_r$  est le nombre quantique radial.

Les niveaux d'énergie de  $H_0$  sont

$$E_{0n} = -\frac{1}{n^2}.$$

- Table des coefficients de Clebsch-Gordan pour  $l \times 1/2$ . La matrice correspond à une valeur choisie de  $m_j$  (voir TP 7)

$j \backslash m_s$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$l + \frac{1}{2}$	$\left(\frac{l+m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{l-m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}}$
$l - \frac{1}{2}$	$-\left(\frac{l-m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{l+m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}}$