

Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°10: Effet Zeeman sur la structure fine de l'atome d'hydrogène

Écrivons l'hamiltonien de structure fine d'un atome d'hydrogène dans un champ magnétique homogène et constant sous la forme

$$H = H_0 + W_{so} + W_Z.$$

Dans cette expression, l'hamiltonien non perturbé est

$$H_0 = \frac{p^2}{2m_e} + V(r), \quad V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

le terme de couplage spin-orbite est

$$W_{so} = \frac{1}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S},$$

où \mathbf{L} et \mathbf{S} sont respectivement le moment cinétique orbital et le spin de l'électron, et le terme Zeeman est

$$W_Z = \frac{e}{2m_e} B(L_z + g_e S_z),$$

où $g_e \approx 2$ est le facteur gyromagnétique de l'électron, et $\mathbf{B} = B\mathbf{1}_z$ est le champs magnétique.

1. Écrire H dans le système d'unités $\hbar = 2m_e = a_0 = e = 1$.
2. Proposer des ECOC pour H_0 , $H_0 + W_{so}$ et $H_0 + W_Z$.
3. Étudier la validité de la méthode des perturbations pour les atomes à faible excitation (le nombre quantique principale $n < 10$).
4. Exprimer les éléments matriciels des opérateurs $H_0 + W_{so}$ et $H_0 + W_Z$ dans les états de base de leur ECOC respectif.
5. Pour les couches $n = 1$ et $n = 2$, calculer les corrections des énergies au premier ordre en traitant d'abord W_Z comme une perturbation. Refaire la même chose en traitant cette fois W_{so} comme une perturbation.
6. Calculer les énergies de H au premier ordre des perturbations.

7. Étudier analytiquement les cas limites $B \rightarrow 0$ et $B \rightarrow \infty$ et les interpréter physiquement. Déterminer les états propres à l'ordre zéro dans ces cas et interpréter les résultats.

RAPPEL

- Rayon de Bohr :

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.529 \times 10^{-10} m.$$

- Constante de structure fine :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

- Les fonctions radiales d'une particule de masse m_e et de charge $-e$ attirée par une charge Ze sont:

$$R_{n_r l}(r) = \frac{2Z^{3/2}}{n^2} \frac{1}{(2l+1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!}{n_r!}} \left(\frac{2Zr}{n}\right)^l {}_1F_1\left(-n_r, 2l+2, \frac{2Zr}{n}\right) e^{-Zr/n}$$

$${}_1F_1(a, c, z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$n = n_r + l + 1$$

où n_r est le nombre quantique radial.

Les niveaux d'énergie de H_0 sont

$$E_{0n} = -\frac{1}{n^2}.$$

- Table des coefficients de Clebsh-Gordan pour $l \times 1/2$. La matrice correspond à une valeur choisie de m_j (voir TP 7)

$j \backslash m_s$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$l + \frac{1}{2}$	$\left(\frac{l+m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{l-m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}}$
$l - \frac{1}{2}$	$-\left(\frac{l-m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{l+m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}}$