

Mécanique Quantique 1 — CORRIGÉ

Séance d'exercices 12 : Révision de plusieurs notions**Exercice 1**

- (a) Pour trouver les états stationnaires et les énergies associées du système H_0 , il suffit de diagonaliser l'Hamiltonien. Notez d'abord que sous forme de matrice, l'hamiltonien s'écrit comme

$$H_0 = |e_1\rangle \langle e_1| + 4 |e_2\rangle \langle e_2| + 2 |e_1\rangle \langle e_2| + 2 |e_2\rangle \langle e_1| = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour trouver les valeurs propres, on résout

$$\begin{aligned} \det(H_0 - \mu I) &= 0 \\ (1 - \mu)(4 - \mu) - 4 &= 0 \\ -5\mu + \mu^2 &= 0 \\ \mu(\mu - 5) &= 0 \end{aligned}$$

On a donc deux valeurs propres : $\mu = 0$ et $\mu = 5$. On résout maintenant les systèmes suivants pour trouver les vecteurs propres et on n'oublie pas de les normaliser.

$$\begin{aligned} H_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ H_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5x \\ 2x + 4y = 5y \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (b) Au premier ordre des perturbations, la correction de l'énergie est donnée par

$$\langle \phi_n | H_1 | \phi_n \rangle$$

où $|\phi_n\rangle$ représente un vecteur propre du système non-perturbé, c'est-à-dire de H_0 . Puisqu'on cherche la correction de l'énergie de l'état fondamental (soit la plus petite énergie), on prendra $|\phi_0\rangle = \vec{u}$. Ainsi,

$$\langle \phi_0 | H_1 | \phi_0 \rangle = \vec{u}^T H_1 \vec{u} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Ainsi, l'énergie fondamentale corrigée au premier ordre sera donc

$$E_0 + \lambda \langle \phi_0 | H_1 | \phi_0 \rangle = 0 + \lambda = \lambda.$$

- (c) Pour comparer avec la valeur exacte du système perturbé, il faut diagonaliser l'Hamiltonien complet, c'est-à-dire

$$H_p = H_0 + \lambda H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda \\ 2 - \lambda & 4 + \lambda \end{pmatrix}$$

Encore une fois, pour trouver les valeurs propres, on résout

$$\begin{aligned}
 \det(H_p - \mu I) &= 0 \\
 (1 - \mu)(4 + \lambda - \mu) - (2 - \lambda)^2 &= 0 \\
 4 - (5 + \lambda)\mu + \mu^2 - 4 + 4\lambda - \lambda^2 &= 0 \\
 \mu^2 - (5 + \lambda)\mu + \lambda(5 - \lambda) &= 0 \\
 \mu &= \frac{5 + \lambda \pm \sqrt{(5 + \lambda)^2 - 4\lambda(5 - \lambda)}}{2} \\
 \mu &= \frac{5 + \lambda \pm \sqrt{25 - 10\lambda + 5\lambda^2}}{2} \\
 \mu &\approx \frac{5 + \lambda \pm \sqrt{25 - 10\lambda}}{2} \\
 \mu &\approx \frac{5 + \lambda \pm 5\sqrt{1 - 2\lambda/5}}{2} \\
 \mu &\approx \frac{5 + \lambda \pm 5(1 - \lambda/5)}{2} \\
 \mu &\approx 5 \quad \text{ou} \quad \mu \approx \lambda
 \end{aligned}$$

où on a supprimé les ordre de λ supérieurs ou égal à 2 et où on a fait une approximation de Taylor.

La plus petite des énergie vaut donc λ et elle correspond bien à la valeur trouvée à l'exercice précédent.

Exercice 2

- (a) On doit coupler deux particules de moments angulaire $l = 1$. Les valeurs possible du moment angulaire j total seront donc $|1 - 1| \leq j \leq 1 + 1$ c'est-à-dire que $j = \{0, 1, 2\}$. On sait que les valeurs propres de l'opérateur moment angulaire total J^2 sont donnée par $j(j + 1)\hbar^2$. Ainsi, les états de la base couplée qui auront un moment angulaire carré de $2\hbar^2$ sont ceux qui auront un $j = 1$.

Puisque $j = 1$, les valeurs possible de m seront donc $m = \{-1, 0, 1\}$. Il y aura donc trois états de la base couplée $|jm\rangle$ qui auront un moment angulaire carré de $2\hbar^2$: $|1, -1\rangle$, $|1, 0\rangle$, $|1, 1\rangle$.

Pour écrire ces états en fonctions des états de la base découplée $|l_1, m_{l_1}, l_2, m_{l_2}\rangle$ on se rappelle que les coefficients de Clebsch-Gordan sont non-nuls seulement si $m = m_{l_1} + m_{l_2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 |1, -1\rangle &= c_{-1,0} |1, -1, 1, 0\rangle + c_{0,-1} |1, 0, 1, -1\rangle \\
 |1, 0\rangle &= c_{-1,1} |1, -1, 1, 1\rangle + c_{1,-1} |1, 1, 1, -1\rangle + c_{0,0} |1, 1, 0, 0\rangle \\
 |1, 1\rangle &= c_{1,0} |1, 1, 1, 0\rangle + c_{0,1} |1, 0, 1, 1\rangle
 \end{aligned}$$

- (b) Pour calculer les énergies de ces états, on cherche les valeurs propres de l'Hamiltonien. Écrivons donc l'Hamiltonien en fonction des opérateurs qui ont pour états propres les états $|jm\rangle$.

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\epsilon_1}{\hbar^2} (\vec{L}_1 + \vec{L}_2) \cdot \vec{L}_2 + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2} (\vec{L}_{1z} + \vec{L}_{2z})^2 \\
 H &= \frac{\epsilon_1}{\hbar^2} (\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 + L_2^2) + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2} (\vec{J}_z)^2 \\
 H &= \frac{\epsilon_1}{\hbar^2} \left(\frac{1}{2} (J^2 - L_1^2 - L_2^2) + L_2^2 \right) + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2} (\vec{J}_z)^2 \\
 H &= \frac{\epsilon_1}{\hbar^2} \frac{1}{2} (J^2 - L_1^2 + L_2^2) + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2} (\vec{J}_z)^2
 \end{aligned} \tag{1}$$

Si on applique maintenant H sur un état $|jm\rangle$ on trouve

$$H|jm\rangle = \left[\frac{\epsilon_1}{\hbar^2} \frac{1}{2} (j(j+1)\hbar^2 - 1(1+1)\hbar^2 + 1(1+1)\hbar^2) + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2} (m\hbar)^2 \right] |jm\rangle = \left[\frac{\epsilon_1}{2} j(j+1) + \epsilon_2 m^2 \right] |jm\rangle$$

et pour nos états de l'exercice a) on a

$$\begin{aligned} H|1, -1\rangle &= \left[\frac{\epsilon_1}{2} j(j+1) + \epsilon_2 m^2 \right] |1, -1\rangle = [\epsilon_1 + \epsilon_2] |1, -1\rangle \\ H|1, 0\rangle &= \left[\frac{\epsilon_1}{2} j(j+1) + \epsilon_2 m^2 \right] |1, 0\rangle = [\epsilon_1] |1, 0\rangle \\ H|1, 1\rangle &= \left[\frac{\epsilon_1}{2} j(j+1) + \epsilon_2 m^2 \right] |1, 1\rangle = [\epsilon_1 + \epsilon_2] |1, 1\rangle \end{aligned}$$

On remarque que les états $|1, 1\rangle$ et $|1, -1\rangle$ ont la même énergie. Cette énergie est donc dégénérée.

Exercice 3

Trouvons d'abord l'état à l'instant t . On se rappelle que l'évolution d'un état est donnée par

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle$$

De plus, si $|\psi\rangle$ est un état propre de H , alors

$$e^{-iHt/\hbar} |\psi\rangle = e^{-i\lambda t/\hbar} |\psi\rangle$$

où λ est la valeur propre associée à l'état propre $|\psi\rangle$. Pour connaître l'évolution de l'état $|\psi(0)\rangle$ il faut donc l'écrire en terme des vecteurs propres de l'Hamiltonien. Dans cet exercice, le travail est déjà fait puisque $|+-\rangle$ et $|-+\rangle$ sont les vecteurs propres de S_{1z} et S_{2z} . En effet

$$H|+-\rangle = \left(\omega_1 \frac{\hbar}{2} - \omega_2 \frac{\hbar}{2} \right) |+-\rangle$$

$$H|-+\rangle = \left(-\omega_1 \frac{\hbar}{2} + \omega_2 \frac{\hbar}{2} \right) |-+\rangle$$

Alors,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle = e^{-iHt/\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t/2} |+-\rangle + e^{i(\omega_1 - \omega_2)t/2} |-+\rangle \right)$$

Cet état est écrit dans la base découplée. Toutefois, on cherche à mesurer S^2 . Il est donc plus simple d'écrire $|\psi(t)\rangle$ dans la base couplée. Pour cela, on se sert de la table des coefficients de Clebsh-Gordan :

		1	0	1
		1	0	-1
1/2	1/2	1	0	0
1/2	-1/2	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
-1/2	1/2	0	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
-1/2	-1/2	0	0	1

À partir de la table, on sait que

$$|+-\rangle = |1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0\rangle$$

$$|-\rangle = |-1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0\rangle$$

Alors, l'état $|\psi(t)\rangle$ s'écrit dans la base découplée comme

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t/2} |+\rangle + e^{i(\omega_1 - \omega_2)t/2} |-\rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t/2} (|1, 0\rangle + |0, 0\rangle) + e^{i(\omega_1 - \omega_2)t/2} (|1, 0\rangle - |0, 0\rangle) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left((e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t/2} + e^{i(\omega_1 - \omega_2)t/2}) |1, 0\rangle + (e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t/2} - e^{i(\omega_1 - \omega_2)t/2}) |0, 0\rangle \right) \\
&= \left(\frac{e^{i(\omega_1 - \omega_2)t/2} + e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t/2}}{2} \right) |1, 0\rangle - i \left(\frac{e^{i(\omega_1 - \omega_2)t/2} - e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t/2}}{2i} \right) |0, 0\rangle \\
&= \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) |1, 0\rangle - i \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) |0, 0\rangle
\end{aligned} \tag{2}$$

Avec l'état écrit sous cette forme, on voit maintenant que si on mesure S^2 on trouvera

$$\begin{aligned}
0 &\text{ avec une probabilité } \left| \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \right|^2 \\
2\hbar &\text{ avec une probabilité } \left| \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \right|^2
\end{aligned}$$

où $2\hbar^2 = s(s+1)\hbar^2$ quand $s = 1$.