Mécanique Quantique 1 —– CORRIGÉ

Séance d'exercices 12 : Révision de plusieurs notions

Exercice 1

(a) Pour trouver les états stationnaires et les énergies associées du système H_0, il suffit de diagonaliser l'Hamiltonien. Notez d'abord que sous forme de matrice, l'hamiltonien s'écrit comme

$$H_0 = |e_1\rangle\langle e_1| + 4|e_2\rangle\langle e_2| + 2|e_1\rangle\langle e_2| + 2|e_2\rangle\langle e_1| = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour trouver les valeurs propres, on résout

$$\begin{aligned} \det(H_0 - \mu I) &= 0 \\ (1-\mu)(4-\mu) - 4 &= 0 \\ -5\mu + \mu^2 &= 0 \\ \mu(\mu - 5) &= 0 \end{aligned}$$

On a donc deux valeurs propres : $\mu = 0$ et $\mu = 5$. On résout maintenant les systèmes suivants pour trouver les vecteurs propres et on n'oublie pas de les normaliser.

$$H_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 2y = 5x \\ 2x + 4y = 5y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) Au premier ordre des perturbations, la correction de l'énergie est donnée par

$$\langle \phi_n| H_1 |\phi_n\rangle$$

où $|\phi_n\rangle$ représente un vecteur propre du système non-perturbé, c'est-à-dire de H_0. Puisqu'on cherche la correction de l'énergie de l'état fondamental (soit la plus petite énergie) , on prendra $|\phi_0\rangle = \vec{u}$. Ainsi,

$$\langle \phi_0| H_1 |\phi_0\rangle = \vec{u}^T H_1 \vec{u} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Ainsi, l'énergie fondamentale corrigée au premier ordre sera donc

$$E_0 + \lambda\langle \phi_0| H_1 |\phi_0\rangle = 0 + \lambda = \lambda.$$

(c) Pour comparer avec la valeur exacte du système perturbé, il faut diagonaliser l'Hamiltonien complet, c'est-à-dire

$$H_p = H_0 + \lambda H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2-\lambda & 4+\lambda \end{pmatrix}$$

Encore une fois, pour trouver les valeurs propres, on résout

$$\begin{aligned}
\det(H_p - \mu I) &= 0 \\
(1-\mu)(4+\lambda-\mu) - (2-\lambda)^2 &= 0 \\
4-(5+\lambda)\mu + \mu^2 - 4 + 4\lambda - \lambda^2 &= 0 \\
\mu^2 - (5+\lambda)\mu + \lambda(5-\lambda) &= 0 \\
\mu &= \frac{5+\lambda \pm \sqrt{(5+\lambda)^2 - 4\lambda(5-\lambda)}}{2} \\
\mu &= \frac{5+\lambda \pm \sqrt{25-10\lambda+5\lambda^2}}{2} \\
\mu &\approx \frac{5+\lambda \pm \sqrt{25-10\lambda}}{2} \\
\mu &\approx \frac{5+\lambda \pm 5\sqrt{1-2\lambda/5}}{2} \\
\mu &\approx \frac{5+\lambda \pm 5(1-\lambda/5)}{2} \\
\mu &\approx 5 \quad \text{ou} \quad \mu \approx \lambda
\end{aligned}$$

où on a supprimé les ordre de λ supérieurs ou égal à 2 et où on a fait une approximation de Taylor.
La plus petite des énergie vaut donc λ et elle correspond bien à la valeur trouvée à l'exercice précédent.

Exercice 2

(a) On doit coupler deux particules de moments angulaire $l = 1$. Les valeurs possible du moment angulaire j total seront donc $|1-1| \leq j \leq 1+1$ c'est-à-dire que $j = \{0, 1, 2\}$. On sait que les valeurs propres de l'opérateur moment angulaire total J^2 sont donnée par $j(j+1)\hbar^2$. Ainsi, les états de la base couplée qui auront un moment angulaire carré de $2\hbar^2$ sont ceux qui auront un $j = 1$.
Puisque $j = 1$, les valeurs possible de m seront donc $m = \{-1, 0, 1\}$. Il y aura donc trois états de la base couplée $|jm\rangle$ qui auront un moment angulaire carré de $2\hbar^2$:$|1,-1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,1\rangle$.
Pour écrire ces états en fonctions des états de la base découplée $|l_1, m_{l_1}, l_2, m_{l_2}\rangle$ on se rappelle que les coefficients de Clebsh-Gordan sont non-nuls seulement si $m = m_{l_1} + m_{l_2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
|1,-1\rangle &= c_{-1,0}\,|1,-1,1,0\rangle + c_{0,-1}\,|1,0,1,-1\rangle \\
|1,0\rangle &= c_{-1,1}\,|1,-1,1,1\rangle + c_{1,-1}\,|1,1,1,-1\rangle + c_{0,0}\,|1,1,0,0\rangle \\
|1,1\rangle &= c_{1,0}\,|1,1,1,0\rangle + c_{0,1}\,|1,0,1,1\rangle
\end{aligned}$$

(b) Pour calculer les énergies de ces états, on cherche les valeurs propres de l'Hamiltonien. Écrivons donc l'Hamiltonien en fonction des opérateurs qui ont pour états propres les états $|jm\rangle$.

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\epsilon_1}{\hbar^2}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)\cdot\vec{L}_2 + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2}(\vec{L}_{1_z} + \vec{L}_{2_z})^2 \\
H &= \frac{\epsilon_1}{\hbar^2}(\vec{L}_1\cdot\vec{L}_2 + \vec{L}_2^2) + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2}(\vec{J}_z)^2 \\
H &= \frac{\epsilon_1}{\hbar^2}\left(\frac{1}{2}(J^2 - L_1^2 - L_2^2) + L_2^2\right) + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2}(\vec{J}_z)^2 \\
H &= \frac{\epsilon_1}{\hbar^2}\frac{1}{2}\left(J^2 - L_1^2 + L_2^2\right) + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2}(\vec{J}_z)^2
\end{aligned} \tag{1}$$

Si on applique maintenant H sur un état $|jm\rangle$ on trouve

$$H|jm\rangle = \left[\frac{\epsilon_1}{\hbar^2}\frac{1}{2}\left(j(j+1)\hbar^2 - 1(1+1)\hbar^2 + 1(1+1)\hbar^2\right) + \frac{\epsilon_2}{\hbar^2}(m\hbar)^2\right]|jm\rangle = \left[\frac{\epsilon_1}{2}j(j+1) + \epsilon_2 m^2\right]|jm\rangle$$

et pour nos états de l'exercice a) on a

$$\begin{aligned} H|1,-1\rangle &= \left[\tfrac{\epsilon_1}{2}j(j+1)+\epsilon_2 m^2\right]|1,-1\rangle &&= [\epsilon_1+\epsilon_2]|1,-1\rangle \\ H|1,0\rangle &= \left[\tfrac{\epsilon_1}{2}j(j+1)+\epsilon_2 m^2\right]|1,0\rangle &&= [\epsilon_1]|1,0\rangle \\ H|1,1\rangle &= \left[\tfrac{\epsilon_1}{2}j(j+1)+\epsilon_2 m^2\right]|1,1\rangle &&= [\epsilon_1+\epsilon_2]|1,1\rangle \end{aligned}$$

On remarque que les états $|1,1\rangle$ et $|1,-1\rangle$ ont la même énergie. Cette énergie est donc dégénérée.

Exercice 3

Trouvons d'abord l'état à l'instant t. On se rappelle que l'évolution d'un état est donnée par

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$$

De plus, si $|\psi\rangle$ est un état propre de H, alors

$$e^{-iHt/\hbar}|\phi\rangle = e^{-i\lambda t/\hbar}|\phi\rangle$$

où λ est la valeur propre associée à l'état propre $|\phi\rangle$. Pour connaître l'évolution de l'état $|\psi(0)\rangle$ il faut donc l'écrire en terme des vecteurs propres de l'Hamiltonien. Dans cet exercice, le travail est déjà fait puisque $|+-\rangle$ et $|-+\rangle$ sont les vecteurs propres de S_{1_z} et S_{2_z}. En effet

$$H|+-\rangle = \left(\omega_1\frac{\hbar}{2} - \omega_2\frac{\hbar}{2}\right)|+-\rangle$$

$$H|-+\rangle = \left(-\omega_1\frac{\hbar}{2} + \omega_2\frac{\hbar}{2}\right)|-+\rangle$$

Alors,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle = e^{-iHt/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2}|+-\rangle + e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2}|-+\rangle\right)$$

Cet état est écrit dans la base découplée. Toutefois, on cherche à mesurer S^2. Il est donc plus simple d'écrire $|\psi(t)\rangle$ dans la base couplée. Pour cela, on se sert de la table des coefficients de Clebsh-Gordan :

		1	1	0	1
		1	0	0	-1
1/2	1/2	1	0	0	0
1/2	$-1/2$	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0
$-1/2$	1/2	0	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
$-1/2$	$-1/2$	0	0	0	1

À partir de la table, on sait que

$$|+-\rangle = |1/2,-1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0,0\rangle$$

$$|-+\rangle = |-1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0,0\rangle$$

Alors, l'état $|\psi(t)\rangle$ s'écrit dans la base découplée comme

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2}\,|+-\rangle + e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2}\,|-+\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2}(|1,0\rangle + |0,0\rangle) + e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2}(|1,0\rangle - |0,0\rangle)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2} + e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2})\,|1,0\rangle + (e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2} - e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2})\,|0,0\rangle\right) \\
&= \left(\frac{e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2} + e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2}}{2}\right)|1,0\rangle - i\left(\frac{e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2} - e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2}}{2i}\right)|0,0\rangle \\
&= \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)|1,0\rangle - i\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)|0,0\rangle \qquad (2)
\end{aligned}$$

Avec l'état écrit sous cette forme, on voit maintenant que si on mesure S^2 on trouvera

$$0 \quad \text{avec une probabilité} \quad \left|\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right|^2$$

$$2\hbar \quad \text{avec une probabilité} \quad \left|\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right|^2$$

où $2\hbar^2 = s(s+1)\hbar^2$ quand $s = 1$.