

Mécanique quantique I

Séance d'exercices 1 : États liés du puits carré

1. PUIITS CARRÉ INFINI EN 1 DIMENSION

Le potentiel du puits carré infini de longueur L est décrit de la façon suivante :

$$V(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & x > L \end{cases}$$

- Écrire l'équation de Schrödinger stationnaire pour une particule de masse m évoluant dans ce potentiel et en déduire les fonctions propres de l'Hamiltonien.
- En déduire également les énergies propres.

2. PUIITS CARRÉ INFINI EN 3 DIMENSIONS

Considérons maintenant le potentiel du puits carré infini en 3 dimensions. On peut imaginer cela comme une particule confinée dans une boîte dure, parallélépipède rectangle, de côté L_1 , L_2 et L_3 . Alors,

$$V^{(3)}(x, y, z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$$

avec

$$V_i(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x_i \leq L_i \\ \infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Comme précédemment, écrire l'équation de Schrödinger stationnaire pour une particule de masse m évoluant dans ce potentiel et en déduire les fonctions propres de l'Hamiltonien en supposant que la solution est factorisée sous la forme $\psi(x, y, z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$.
- En déduire également les énergies propres.
- Approximer le nombre d'états quantiques indépendants à l'intérieur de la boîte.

3. PUIITS CARRÉ FINI EN 3 DIMENSIONS

On considère maintenant un puits carré fini en 3 dimensions de la forme :

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

où V_0 est positif.

- Écrire, en coordonnées sphériques, l'équation de Schrödinger stationnaire pour une particule de masse m évoluant dans ce potentiel central.
- Exprimer l'unité d'énergie en fonction des paramètres du problème. Puis, choisir les unités $\hbar = 2m = a = 1$ et récrire l'équation de Schrödinger dans ces unités.

- (c) En posant $\psi(\mathbf{r}) = r^{-1}u_l(r)Y_l^m(\Omega)$, établir l'équation vérifiée par $u_l(r)$. Particulariser pour l'onde s . Dans la suite, on considèrera uniquement ce dernier cas.
- (d) Résoudre cette équation dans le cas $-V_0 < E < 0$ en introduisant les variables $\alpha = \sqrt{V_0 + E}$ et $\epsilon = \sqrt{-E}$. Dédire une condition de quantification de l'énergie.
- (e) Par une méthode graphique utilisant la variable α , discuter le nombre d'énergies liées du puits carré en fonction du paramètre V_0 .
- (f) Déterminer et représenter schématiquement les fonctions propres radiales $u_{n_r,0}(r)$ associées aux différentes énergies $E_{n_r,0}$ trouvées, où n_r est le nombre quantique radial. Les normer.
- (g) Calculer la probabilité P_{n_r} de présence de la particule *hors* du puits ($r > a$).