

## Mécanique quantique I

### Séance d'exercices 1 : États liés du puits carré

#### 1. PUIITS CARRÉ INFINI EN 1 DIMENSION

Le potentiel du puits carré infini de longueur  $L$  est décrit de la façon suivante :

$$V(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & x > L \end{cases}$$

- Écrire l'équation de Schrödinger stationnaire pour une particule de masse  $m$  évoluant dans ce potentiel et en déduire les fonctions propres de l'Hamiltonien.
- En déduire également les énergies propres.

#### 2. PUIITS CARRÉ INFINI EN 3 DIMENSIONS

Considérons maintenant le potentiel du puits carré infini en 3 dimensions. On peut imaginer cela comme une particule confinée dans une boîte dure, parallélépipède rectangle, de côté  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ . Alors,

$$V^{(3)}(x, y, z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$$

avec

$$V_i(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x_i \leq L_i \\ \infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Comme précédemment, écrire l'équation de Schrödinger stationnaire pour une particule de masse  $m$  évoluant dans ce potentiel et en déduire les fonctions propres de l'Hamiltonien en supposant que la solution est factorisée sous la forme  $\psi(x, y, z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$ .
- En déduire également les énergies propres.
- Approximer le nombre d'états quantiques indépendants à l'intérieur de la boîte.

#### 3. PUIITS CARRÉ FINI EN 3 DIMENSIONS

On considère maintenant un puits carré fini en 3 dimensions de la forme :

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

où  $V_0$  est positif.

- Écrire, en coordonnées sphériques, l'équation de Schrödinger stationnaire pour une particule de masse  $m$  évoluant dans ce potentiel central.
- Exprimer l'unité d'énergie en fonction des paramètres du problème. Puis, choisir les unités  $\hbar = 2m = a = 1$  et récrire l'équation de Schrödinger dans ces unités.

- (c) En posant  $\psi(\mathbf{r}) = r^{-1}u_l(r)Y_l^m(\Omega)$ , établir l'équation vérifiée par  $u_l(r)$ . Particulariser pour l'onde  $s$ . Dans la suite, on considèrera uniquement ce dernier cas.
- (d) Résoudre cette équation dans le cas  $-V_0 < E < 0$  en introduisant les variables  $\alpha = \sqrt{V_0 + E}$  et  $\epsilon = \sqrt{-E}$ . Dédire une condition de quantification de l'énergie.
- (e) Par une méthode graphique utilisant la variable  $\alpha$ , discuter le nombre d'énergies liées du puits carré en fonction du paramètre  $V_0$ .
- (f) Déterminer et représenter schématiquement les fonctions propres radiales  $u_{n_r,0}(r)$  associées aux différentes énergies  $E_{n_r,0}$  trouvées, où  $n_r$  est le nombre quantique radial. Les normer.
- (g) Calculer la probabilité  $P_{n_r}$  de présence de la particule *hors* du puits ( $r > a$ ).