Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°2 : États liés du puits carré à trois dimensions

1. Écrire, en coordonnées sphériques, l'équation de Schrödinger stationnaire pour une particule de masse m évoluant dans le potentiel central

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

   où V_0 est positif.

2. Exprimer l'unité d'énergie en fonction des paramètres du problème. Puis, choisir les unités $\hbar = 2m = a = 1$ et récrire l'équation de Schrödinger dans ces unités.
3. En posant $\psi(\mathbf{r}) = r^{-1} u_l(r) Y_l^m(\Omega)$, établir l'équation vérifiée par $u_l(r)$. Particulariser pour l'onde s. Dans la suite, on considèrera uniquement ce dernier cas.
4. Résoudre cette équation dans le cas $-V_0 < E < 0$ en introduisant les variables $\alpha = \sqrt{V_0 + E}$ et $\epsilon = \sqrt{-E}$. Déduire des postulats une condition de quantification de l'énergie.
5. Par une méthode graphique utilisant la variable α, discuter le nombre d'énergies liées du puits carré en fonction du paramètre V_0.
6. Déterminer et représenter schématiquement les fonctions propres radiales $u_{n_r 0}(r)$ associées aux différents énergies $E_{n_r 0}$ trouvées, où n_r est le nombre quantique radial. Les normer.
7. Calculer la probabilité P_{n_r} de présence de la particule *hors* du puits ($r > a$).
8. Application physique : l'interaction nucléaire forte entre un proton ($m_p = 1.672622 \cdot 10^{-27}$ kg) et un neutron ($m_n = 1.674927 \cdot 10^{-27}$ kg) peut être modélisée par un puits carré de rayon $a = 1.5$ fm et de profondeur $V_0 = 59.64$ MeV.
   (a) Pour se ramener au calcul précédent, que représentent physiquement les variables r et m dans ce cas ?
   (b) Combien d'états liés ce système possède-t-il ?
   (c) Déterminer numériquement les énergies de liaison.
   (d) Calculer les probabilités P_{n_r} et dessiner les fonctions radiales $R_{n_r 0}(r) = u_{n_r 0}(r)/r$ correspondantes.

---

http ://quic.ulb.ac.be, ekarpov@ulb.ac.be, Christina.Giarmatzi@ulb.ac.be