Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°2 : Oscillateur harmonique à trois dimensions (Partie 2)

1. A partir des résultats obtenus dans la partie 1, exprimer les fonctions radiales $R_{n_r l}(r) = r^{-1}u_{n_r l}(r)$ (sans les normer). Les exprimer sous forme de fonction hypergéométrique confluente et de polynome de Laguerre généralisé. En déduire le sens physique de n_r.
2. Pour $n = 0$ et 1, normer les fonctions d'onde.
3. Application : un nanocristal (ou "particule quantique" ou "q(uantum) dot") constitué d'arséniure de gallium (GaAs) possède des propriétés optiques très particulières du fait de la quantification des niveaux d'énergie des électrons de conduction piégés en son sein. Un modèle simpliste pour ces électrons de conduction est de considérer qu'ils ont une masse effective de $0.067m_e$ et qu'ils sont soumis à un potentiel harmonique de force $\hbar\omega = 4$ meV. Calculer les énergies accessibles aux électrons de conduction. Sachant que, pour un cristal infini, le gap du GaAs est de 1.42 eV, en déduire l'énergie minimale d'un photon émis par un électron passant de l'état de conduction le plus bas à l'état de valence le plus élevé.

Polynômes de Laguerre généralisés

$$L_n^\alpha(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}\,{}_1F_1(-n,\alpha+1,z),$$

$${}_1F_1(a,c,z) = 1 + \frac{a}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!},$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty du\, u^{z-1}e^{-u}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{et} \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N},$$

Harmoniques sphériques

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_{lm}(\cos\theta)\,e^{im\phi},$$

$$P_{lm}(x) = \frac{(-1)^m}{2^l\,l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l.$$

---

http ://quic.ulb.ac.be, Evgueni.Karpov@ulb.ac.be ahertz@ulb.ac.be