Mécanique quantique I

Séance d'exercices n^o 2 : États, Opérateurs et Commutateurs

1. Soient $\hat{A}, \hat{B}$ et $\hat{C}$ des opérateurs linéaires. Montrer que
   (a) $[\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}, \hat{C}] = \lambda[\hat{A}, \hat{C}] + \mu[\hat{B}, \hat{C}]$. (Linéarité)
   (b) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$. (Règle du produit)
   (c) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$. (Règle du produit)
   (d) $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$. (Identité de Jacobi)
2. Soient $\hat{A}, \hat{B}$ et $\hat{C}$ des opérateurs linéaires avec $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ et $[\hat{B}, \hat{C}] = 0$. Peut-on en déduire que $[\hat{A}, \hat{C}] = 0$?
3. Calculer la norme, le produit scalaire et en déduire la normalisation des vecteurs $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$:
   (a) dans le cas où $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathcal{E}_\mathcal{H}$ sont des vecteurs discrets, non-normés, mais orthogonaux.
   $$|\phi_1\rangle = a\,|v_1\rangle + ib\,|v_2\rangle\,,$$
   $$|\phi_2\rangle = a\,|v_1\rangle - ib\,|v_2\rangle$$
   (b) dans le cas où $\{|v_p\rangle\}$ sont des vecteurs continus et "orthogonaux", c'est-à-dire $\langle v_p|v_q\rangle = \delta(p-q)$, où $\delta(x)$ est la distribution de Dirac qui satisfait
   $$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x-a) = f(a).$$
   $$|\phi_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{a+\pi} dp\ |v_p\rangle \cos p,$$
   $$|\phi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{a+\pi} dp\ |v_p\rangle \sin p.$$
4. Soient trois opérateurs linéaires dont la représentation matricielle est donnée par
   $$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$, sont-ils hermitiens ?
   (b) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$. Que remarquez vous ?
   (c) Montrer en toute généralité que les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont réelles. Puis, montrer que les vecteurs propres (de cet opérateur) pour des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

http ://quic.ulb.ac.be, zvherstr@ulb.ac.be

5. Soient $\hat{x}$ et $\hat{p}$ les opérateurs de position et de quantité de mouvement d'une particule à une dimension.
   (a) Calculer $[\hat{x}, \hat{p}]$
   (b) Calculer $[f(\hat{x}), \hat{p}]$
   (c) Montrer par récurrence que $[\hat{x}^n, \hat{p}] = i\hbar n x^{n-1}$.
6. Démontrez le principe d'incertitude de Robertson-Schrödinger qui dit que pour n'importe quel observable A et B

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2}\langle\{A, B\}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}\langle[A, B]\rangle\right)^2.$$

Commencez d'abord par montrer que

$$\sigma_A^2 = \langle(A - \langle A\rangle)\psi|(A - \langle A\rangle)\psi\rangle$$

et de même pour σ_B^2. Résolvez ensuite en posant $\sigma_A^2 = \langle f|f\rangle$ et $\sigma_B^2 = \langle g|g\rangle$, puis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle,$$

et finalement en utilisant la propriété suivante des nombres complexes :

$$|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 = \left(\frac{z + z^*}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - z^*}{2i}\right)^2.$$