

## Mécanique Quantique 1 — CORRIGÉ

Séance d'exercices 2 : états, opérateurs et commutateurs

## Exercice 1

a)

$$\begin{aligned}
[\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}, \hat{C}] &= (\lambda\hat{A} + \mu\hat{B})\hat{C} - \hat{C}(\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}) \\
&= \lambda\hat{A}\hat{C} + \mu\hat{B}\hat{C} - \lambda\hat{C}\hat{A} - \mu\hat{C}\hat{B} \\
&= \lambda(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}) + \mu(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}) \\
&= \lambda[\hat{A}, \hat{C}] + \mu[\hat{B}, \hat{C}]
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} \\
&= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} \\
&= \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= -[\hat{C}, \hat{A}\hat{B}] \\
&= -\hat{A}[\hat{C}, \hat{B}] - [\hat{C}, \hat{A}]\hat{B} \\
&= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} + \hat{C}\hat{B}\hat{A} + \hat{B}\hat{C}\hat{A} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \\
&\quad \hat{C}\hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{C}\hat{A}\hat{B} - \hat{C}\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} \\
&= 0
\end{aligned}$$

## Exercice 2

D'après l'équation de l'exercice 1.d), on a

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0.$$

Alors, si  $[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{B}, \hat{C}] = 0$ , on obtient  $[\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] = 0$ . Toutefois, rien ne nous permet de conclure que  $[\hat{C}, \hat{A}] = 0 \Leftrightarrow [\hat{A}, \hat{C}] = 0$ . Ce qu'on sait, à partir de là, c'est que l'opérateur  $\hat{B}$  commute avec  $[\hat{A}, \hat{C}]$ .

D'un autre côté, on sait que si deux opérateurs commutent, ils ont les mêmes vecteurs propres. Ainsi, puisque  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ ,  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  ont les mêmes vecteurs propres. De même, puisque  $[\hat{B}, \hat{C}] = 0$ ,  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$  ont les mêmes vecteurs propres. On est donc tenté de dire que  $\hat{A}$  et  $\hat{C}$  ont également les mêmes vecteurs propres. Ceci est vrai sauf si ces opérateurs ont des valeurs propres dégénérées. Dans ce dernier cas, rien ne permet de conclure que  $\hat{A}$  et  $\hat{C}$  commutent, car en cas de dégénérescence la base de vecteurs propres d'un opérateur n'est pas unique et par conséquent, le raisonnement ci-dessus ne s'applique pas. Un exemple de cette situation serait de prendre les trois opérateurs  $\{L^2, L_x, L_y\}$ . En effet,  $[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = 0$ , mais  $[L_x, L_y] \neq 0$ .

### Exercice 3

a)

$$|\phi_1\rangle = a|v_1\rangle + ib|v_2\rangle \quad |\phi_2\rangle = a|v_1\rangle - ib|v_2\rangle$$

On peut calculer les normes :

$$\begin{aligned} \|\phi_1\|^2 &= \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle \\ &= (a^* \langle v_1 | - ib^* \langle v_2 |)(a|v_1\rangle + ib|v_2\rangle) \\ &= |a|^2 \|v_1\|^2 + 0 - 0 + |b|^2 \|v_2\|^2 \\ &= |a|^2 \|v_1\|^2 + |b|^2 \|v_2\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\phi_2\|^2 &= \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle \\ &= (a^* \langle v_1 | + ib^* \langle v_2 |)(a|v_1\rangle - ib|v_2\rangle) \\ &= |a|^2 \|v_1\|^2 - 0 + 0 + |b|^2 \|v_2\|^2 \\ &= |a|^2 \|v_1\|^2 + |b|^2 \|v_2\|^2 \\ &= \|\phi_1\|^2 \end{aligned}$$

où on utilise le fait que  $|v_1\rangle$  et  $|v_2\rangle$  sont des vecteurs non-normés et orthogonaux, c'est-à-dire que  $\langle v_1 | v_1 \rangle = \|v_1\|^2$ ,  $\langle v_2 | v_2 \rangle = \|v_2\|^2$  et  $\langle v_1 | v_2 \rangle = \langle v_2 | v_1 \rangle = 0$ .

Le produit scalaire vaut :

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle &= (a^* \langle v_1 | - ib^* \langle v_2 |)(a|v_1\rangle - ib|v_2\rangle) \\ &= |a|^2 \|v_1\|^2 - 0 - 0 - |b|^2 \|v_2\|^2 \\ &= |a|^2 \|v_1\|^2 - |b|^2 \|v_2\|^2 \end{aligned}$$

Et les vecteurs normalisés deviennent donc :

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\langle \phi_1 | \phi_1 \rangle}} |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 \|v_1\|^2 + |b|^2 \|v_2\|^2}} |\phi_1\rangle \\ |\tilde{\phi}_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\langle \phi_2 | \phi_2 \rangle}} |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 \|v_1\|^2 + |b|^2 \|v_2\|^2}} |\phi_2\rangle \end{aligned}$$

b)

Cette fois-ci on a des vecteurs continus :

$$|\phi_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{a+\pi} dp |v_p\rangle \cos p \quad |\phi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{a+\pi} dp |v_p\rangle \sin p$$

On peut calculer les normes :

$$\begin{aligned}
\|\phi_1\|^2 &= \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle \\
&= \frac{2}{\pi} \int_a^{a+\pi} \int_a^{a+\pi} dpdq \underbrace{\langle v_q | v_p \rangle}_{\delta(p-q)} \cos p \cos q \\
&= \frac{2}{\pi} \int_a^{a+\pi} dp \cos^2 p \\
&= \frac{2}{\pi} \int_a^{a+\pi} \frac{1 + \cos 2p}{2} dp \\
&= \frac{1}{\pi} \left( p \Big|_a^{a+\pi} + \frac{\sin 2p}{2} \Big|_a^{a+\pi} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( a + \pi - a + \frac{1}{2} \underbrace{(\sin 2(a + \pi) - \sin 2a)}_{=0} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\phi_2\|^2 &= \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle \\
&= \frac{2}{\pi} \int_a^{a+\pi} \int_a^{a+\pi} dpdq \underbrace{\langle v_q | v_p \rangle}_{\delta(p-q)} \sin p \sin q \\
&= \frac{2}{\pi} \int_a^{a+\pi} dp \sin^2 p \\
&= \frac{2}{\pi} \int_a^{a+\pi} \frac{1 - \cos 2p}{2} dp \\
&= \dots \\
&= 1
\end{aligned}$$

Les vecteurs sont donc déjà normalisés.

Il reste à calculer le produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_a^{a+\pi} \int_a^{a+\pi} dpdq \underbrace{\langle v_q | v_p \rangle}_{\delta(p-q)} \sin p \cos q \\
&= \frac{2}{\pi} \int_a^{a+\pi} dp \cos p \sin p \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{\sin a}^{\sin(a+\pi)} u du \quad \text{en posant } u = \sin p \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{u^2}{2} \Big|_{\sin a}^{\sin(a+\pi)=-\sin a} \\
&= \frac{1}{\pi} (\sin^2 a - \sin^2 a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Les vecteurs sont donc orthogonaux.

### Exercice 4

a)

Un opérateur est hermitien si  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ .

$$\hat{A}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{A}$$

$$\hat{B}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{B}$$

$$\hat{C}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -i & -i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \hat{C}$$

Donc  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  sont hermitiens, mais pas  $\hat{C}$ .

b)

On voit tout de suite qu'une des valeurs propres de  $\hat{A}$  est  $\lambda = 1$ . Pour trouver les autres valeurs propres  $\lambda$  de  $\hat{A}$ , on résout l'équation  $\det(\hat{A} - \lambda I) = 0$ .

$$\det(\hat{A} - \lambda I) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)((1-\lambda)^2+1) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)\lambda(-2+\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 0 \text{ et } \lambda = 2$$

Pour  $\lambda = 1$  on calcule les vecteurs propres :

$$\hat{A}\phi = \phi \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + iy = x \\ -ix + y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \text{ indéterminé} \end{cases} \Rightarrow v_1 = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Même chose pour  $\lambda = 0$  :

$$\hat{A}\phi = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + iy = 0 \\ -ix + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -iy \\ z = 0 \\ y \text{ indéterminé} \end{cases} \Rightarrow v_0 = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et pour  $\lambda = 2$  :

$$\hat{A}\phi = 2\phi \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + iy = 2x \\ -ix + y = 2y \\ z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ y \text{ indéterminé} \end{cases} \Rightarrow v_2 = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisqu'en général, on demande des vecteurs normalisés, on choisira les vecteurs propres ainsi :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Faisons la même chose pour la matrice  $\hat{B}$ . On voit qu'une des valeurs propres est  $\lambda = 0$ , les autres sont :

$$\det(\hat{B} - \lambda I) = 0 \Rightarrow (-\lambda)((-\lambda)^2 - 4) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 2 \text{ et } \lambda = -2$$

On calcule les vecteurs propres. Pour  $\lambda = 0$  :

$$\hat{B}\phi = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2iy = 0 \\ 2ix = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \text{ indéterminé} \end{cases} \Rightarrow v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour  $\lambda = 2$  :

$$\hat{B}\phi = 2\phi \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2iy = 2x \\ 2ix = 2y \\ 0 = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -iy \\ z = 0 \\ y \text{ indéterminé} \end{cases} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et pour  $\lambda = -2$  :

$$\hat{B}\phi = -2\phi \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2iy = -2x \\ 2ix = -2y \\ 0 = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = iy \\ z = 0 \\ y \text{ indéterminé} \end{cases} \Rightarrow v_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exactement de la même façon, on trouve que les valeurs propres de  $\hat{C}$  sont  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = i$  et  $\lambda = 2$ , et les vecteurs propres associés sont

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_i = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i + 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il est intéressant de remarquer que les matrices  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  ont les mêmes vecteurs propres. Cela signifie donc que  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  commutent  $\Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = 0$ .

Remarquez également que  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  ont forcément des valeurs propres réelles, contrairement à  $\hat{C}$ , car ils sont hermitiens.

c)

Définissons  $|\psi\rangle$  un vecteur propre de  $\hat{A}$ . Ainsi,  $\hat{A}|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle$ . Puisque  $\hat{A}$  est hermitien,  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$  et donc, si on applique l'opérateur à gauche, sur le bra, cela revient au même que d'appliquer  $A$  à droite.

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle &\Rightarrow \langle \hat{A} \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle \\ &\Rightarrow \alpha^* \langle \psi | \psi \rangle = \alpha \langle \psi | \psi \rangle \\ &\Rightarrow \alpha = \alpha^* \\ &\Rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Montrons maintenant que des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes seront orthogonaux si l'opérateur est hermitien. Soit  $\hat{A}|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle$  et  $\hat{A}|\phi\rangle = \beta|\phi\rangle$  avec bien sûr  $\hat{A}$  hermitien. Alors, puisque  $A = A^\dagger$ , appliquer  $A$  à sur le ket ou  $A$  sur le bra revient au même :

$$\begin{aligned} \langle A\psi | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{A}\phi \rangle &\Rightarrow \alpha \langle \psi | \phi \rangle = \beta \langle \psi | \phi \rangle \\ &\Rightarrow (\alpha - \beta) \langle \psi | \phi \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \psi | \phi \rangle = 0 \quad \text{car } \alpha \neq \beta \\ &\Rightarrow \text{Les vecteurs sont orthogonaux} \end{aligned}$$

## Exercice 5

a)

Pour commencer le calcul, il faut d'abord écrire  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ . Pour faciliter le calcul du commutateur, appliquons-le à une fonction quelconque  $f(x)$  :

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}]f(x) &= (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})f(x) \\ &= x\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(x)\right) + i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(xf(x)) \\ &= -xi\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(x) + i\hbar f(x) + i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} f(x) \\ &= i\hbar f(x). \end{aligned}$$

Ainsi,  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ .

b)

$$\begin{aligned} [f(\hat{x}), \hat{p}]g(x) &= (f(\hat{x})\hat{p} - \hat{p}f(\hat{x}))g(x) \\ &= f(x)\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} g(x)\right) + i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(f(x)g(x)) \\ &= -f(x)i\hbar \frac{\partial}{\partial x} g(x) + i\hbar g(x) \frac{\partial}{\partial x} f(x) + i\hbar f(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x) \\ &= i\hbar g(x) \frac{\partial}{\partial x} f(x). \end{aligned}$$

Ainsi,  $[f(\hat{x}), \hat{p}] = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(x)$ .

c)

$$\begin{aligned} [\hat{x}^n, \hat{p}] &= \hat{x}[\hat{x}^{n-1}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x}^{n-1} \\ &= \hat{x}(\hat{x}[\hat{x}^{n-2}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x}^{n-2}) + i\hbar \hat{x}^{n-1} \\ &= \hat{x}^2[\hat{x}^{n-2}, \hat{p}] + 2i\hbar \hat{x}^{n-1} \\ &= \hat{x}^2(\hat{x}[\hat{x}^{n-3}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x}^{n-3}) + 2i\hbar \hat{x}^{n-1} \\ &= \hat{x}^3[\hat{x}^{n-3}, \hat{p}] + 3i\hbar \hat{x}^{n-1} \\ &= \dots \\ &= \hat{x}^{n-1}[\hat{x}, \hat{p}] + (n-1)i\hbar \hat{x}^{n-1} \\ &= ni\hbar \hat{x}^{n-1} \end{aligned}$$

## Exercice 6

Premièrement, on sait que  $\sigma_A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$ . Alors,

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | (A - \langle A \rangle)(A - \langle A \rangle) | \psi \rangle \\ &= \langle (A - \langle A \rangle)^\dagger \psi | (A - \langle A \rangle) \psi \rangle \\ &= \langle (A - \langle A \rangle) \psi | (A - \langle A \rangle) \psi \rangle \end{aligned}$$

Où on utilise le fait qu'un observable est un opérateur hermitien. On procède de même pour  $\sigma_B^2$ .  
 Posons maintenant  $\sigma_A^2 = \langle f|f \rangle$  et  $\sigma_B^2 = \langle g|g \rangle$ . Alors,

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f|f \rangle \langle g|g \rangle \geq |\langle f|g \rangle|^2$$

où la dernière égalité n'est rien d'autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Calculons maintenant  $\langle f|g \rangle$

$$\begin{aligned} \langle f|g \rangle &= \langle (A - \langle A \rangle)\psi | (B - \langle B \rangle)\psi \rangle \\ &= \langle \psi | (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | (AB - A\langle B \rangle - \langle A \rangle B + \langle A \rangle \langle B \rangle) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | AB | \psi \rangle - \langle \psi | A\langle B \rangle | \psi \rangle - \langle \psi | \langle A \rangle B | \psi \rangle + \langle \psi | \langle A \rangle \langle B \rangle | \psi \rangle \\ &= \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\ &= \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned}$$

et de la même façon  $\langle g|f \rangle = \langle BA \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$ .

Maintenant, puisque

$$|z|^2 = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2 = \left( \frac{z + z^*}{2} \right)^2 + \left( \frac{z - z^*}{2i} \right)^2.$$

on a

$$\begin{aligned} |\langle f|g \rangle|^2 &= \left( \frac{\langle f|g \rangle + \langle g|f \rangle}{2} \right)^2 + \left( \frac{\langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle}{2i} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle BA \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle}{2} \right)^2 + \left( \frac{\langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle - \langle BA \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle}{2i} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\langle \{A, B\} \rangle - 2\langle A \rangle \langle B \rangle}{2} \right)^2 + \left( \frac{\langle [A, B] \rangle}{2i} \right)^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq |\langle f|g \rangle|^2 = \left( \frac{\langle \{A, B\} \rangle - 2\langle A \rangle \langle B \rangle}{2} \right)^2 + \left( \frac{\langle [A, B] \rangle}{2i} \right)^2$$