Mécanique Quantique 1 —– CORRIGÉ

Séance d'exercices 2 : états, opérateurs et commutateurs

Exercice 1

a)

$$\begin{aligned}[\lambda\hat{A}+\mu\hat{B},\hat{C}] &= (\lambda\hat{A}+\mu\hat{B})\hat{C}-\hat{C}(\lambda\hat{A}+\mu\hat{B})\\ &= \lambda\hat{A}\hat{C}+\mu\hat{B}\hat{C}-\lambda\hat{C}\hat{A}-\mu\hat{C}\hat{B}\\ &= \lambda(\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A})+\mu(\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B})\\ &= \lambda[\hat{A},\hat{C}]+\mu[\hat{B},\hat{C}]\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}\\ &= \hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}+\hat{B}\hat{A}\hat{C}-\hat{B}\hat{A}\hat{C}\\ &= \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] &= -[\hat{C},\hat{A}\hat{B}]\\ &= -\hat{A}[\hat{C},\hat{B}]-[\hat{C},\hat{A}]\hat{B}\\ &= \hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]+[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]+[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{A}\hat{C}\hat{B}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}+\hat{C}\hat{B}\hat{A}+\hat{B}\hat{C}\hat{A}-\hat{B}\hat{A}\hat{C}-\\ &\quad \hat{C}\hat{A}\hat{B}+\hat{A}\hat{C}\hat{B}+\hat{C}\hat{A}\hat{B}-\hat{C}\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}\hat{C}+\hat{B}\hat{A}\hat{C}\\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 2

D'après l'équation de l'exercice 1.d), on a

$$[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]+[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]+[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]]=0.$$

Alors, si $[\hat{A},\hat{B}]=[\hat{B},\hat{C}]=0$, on obtient $[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]=0$. Toutefois, rien ne nous permet de conclure que $[\hat{C},\hat{A}]=0 \Leftrightarrow [\hat{A},\hat{C}]=0$. Ce qu'on sait, à partir de là, c'est que l'opérateur $\hat{B}$ commute avec $[\hat{A},\hat{C}]$.

D'un autre côté, on sait que si deux opérateurs commutent, ils ont les mêmes vecteurs propres. Ainsi, puisque $[\hat{A},\hat{B}]=0$, $\hat{A}$ et $\hat{B}$ ont les mêmes vecteurs propres. De même, puisque $[\hat{B},\hat{C}]=0$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ ont les mêmes vecteurs propres. On est donc tenté de dire que $\hat{A}$ et $\hat{C}$ ont également les mêmes vecteurs propres. Ceci est vrai sauf si ces opérateurs ont des valeurs propres dégénérées. Dans ce dernier cas, rien ne permet de conclure que $\hat{A}$ et $\hat{C}$ commutent, car en cas de dégénérescence la base de vecteurs propres d'un opérateur n'est pas unique et par conséquent, le raisonnement ci-dessus ne s'applique pas. Un exemple de cette situation serait de prendre les trois opérateurs $\{L^2,L_x,L_y\}$. En effet, $[L^2,l_x]=[L^2,L_y]=0$, mais $[L_x,L_y]\neq 0$.

Exercice 3

a)

$$|\phi_1\rangle = a|v_1\rangle + ib|v_2\rangle \qquad\qquad |\phi_2\rangle = a|v_1\rangle - ib|v_2\rangle$$

On peut calculer les normes :

$$\begin{aligned}
||\phi_1||^2 &= \langle\phi_1|\phi_1\rangle \\
&= (a^*\langle v_1| - ib^*\langle v_2|)(a|v_1\rangle + ib|v_2\rangle) \\
&= |a|^2||v_1||^2 + 0 - 0 + |b|^2||v_2||^2 \\
&= |a|^2||v_1||^2 + |b|^2||v_2||^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
||\phi_2||^2 &= \langle\phi_2|\phi_2\rangle \\
&= (a^*\langle v_1| + ib^*\langle v_2|)(a|v_1\rangle - ib|v_2\rangle) \\
&= |a|^2||v_1||^2 - 0 + 0 + |b|^2||v_2||^2 \\
&= |a|^2||v_1||^2 + |b|^2||v_2||^2 \\
&= ||\phi_1||^2
\end{aligned}$$

où on utilise le fait que $|v_1\rangle$ et $|v_2\rangle$ sont des vecteurs non-normés et orthogonaux, c'est-à-dire que $\langle v_1|v_1\rangle = ||v_1||^2$, $\langle v_2|v_2\rangle = ||v_2||^2$ et $\langle v_1|v_2\rangle = \langle v_2|v_1\rangle = 0$.
Le produit scalaire vaut :

$$\begin{aligned}
\langle\phi_1|\phi_2\rangle &= (a^*\langle v_1| - ib^*\langle v_2|)(a|v_1\rangle - ib|v_2\rangle) \\
&= |a|^2||v_1||^2 - 0 - 0 - |b|^2||v_2||^2 \\
&= |a|^2||v_1||^2 - |b|^2||v_2||^2
\end{aligned}$$

Et les vecteurs normalisés deviennent donc :

$$|\widetilde{\phi}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\phi_1|\phi_1\rangle}}|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|^2||v_1||^2 + |b|^2||v_2||^2}}|\phi_1\rangle$$

$$|\widetilde{\phi}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\phi_2|\phi_2\rangle}}|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|^2||v_1||^2 + |b|^2||v_2||^2}}|\phi_2\rangle$$

b)
Cette fois-ci on a des vecteurs continus :

$$|\phi_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^{a+\pi} dp|v_p\rangle \cos p \qquad\qquad |\phi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^{a+\pi} dp|v_p\rangle \sin p$$

On peut calculer les normes :

$$
\begin{aligned}
||\phi_1||^2 &= \langle\phi_1|\phi_1\rangle \\
&= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi}\int_a^{a+\pi} dpdq\,\underbrace{\langle v_q|v_p\rangle}_{\delta(p-q)}\cos p\cos q \\
&= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi} dp\cos^2 p \\
&= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi} \frac{1+\cos 2p}{2}\,dp \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(p\Big|_a^{a+\pi} + \frac{\sin 2p}{2}\Big|_a^{a+\pi}\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(a+\pi-a+\frac{1}{2}\underbrace{(\sin 2(a+\pi)-\sin 2a)}_{=0}\Big) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
||\phi_2||^2 &= \langle\phi_2|\phi_2\rangle \\
&= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi}\int_a^{a+\pi} dpdq\,\underbrace{\langle v_q|v_p\rangle}_{\delta(p-q)}\sin p\sin q \\
&= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi} dp\sin^2 p \\
&= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi} \frac{1-\cos 2p}{2}\,dp \\
&= \ldots \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Les vecteurs sont donc déjà normalisés.
Il reste à calculer le produit scalaire :

$$
\begin{aligned}
\langle\phi_1|\phi_2\rangle &= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi}\int_a^{a+\pi} dpdq\,\underbrace{\langle v_q|v_p\rangle}_{\delta(p-q)}\sin p\cos q \\
&= \frac{2}{\pi}\int_a^{a+\pi} dp\cos p\sin p \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{\sin a}^{\sin(a+\pi)} udu \qquad\qquad \text{en posant } u=\sin p \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{u^2}{2}\Big|_{\sin a}^{\sin(a+\pi)=-\sin a} \\
&= \frac{1}{\pi}(\sin^2 a-\sin^2 a) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Les vecteurs sont donc orthogonaux.

Exercice 4

a)
Un opérateur est hermitien si $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$.

$$\hat{A}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{A}$$

$$\hat{B}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{B}$$

$$\hat{C}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -i & -i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \hat{C}$$

Donc $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont hermitiens, mais pas $\hat{C}$.

b)
On voit tout de suite qu'une des valeurs propres de $\hat{A}$ est $\lambda = 1$. Pour trouver les autres valeurs propres λ de $\hat{A}$, on résout l'équation $det(\hat{A} - \lambda I) = 0$.

$$det(\hat{A}-\lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)((1-\lambda)^2+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)\lambda(-2+\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1,\ \lambda = 0 \text{ et } \lambda = 2$$

Pour $\lambda = 1$ on calcule les vecteurs propres :

$$\hat{A}\phi = \phi \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + iy = x \\ -ix + y = y \\ z = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \text{ indéterminé} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_1 = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Même chose pour $\lambda = 0$:

$$\hat{A}\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + iy = 0 \\ -ix + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -iy \\ z = 0 \\ y \text{ indéterminé} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_0 = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et pour $\lambda = 2$:

$$\hat{A}\phi = 2\phi \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + iy = 2x \\ -ix + y = 2y \\ z = 2z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ y \text{ indéterminé} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_2 = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisqu'en général, on demande des vecteurs normalisés, on choisira les vecteurs propres ainsi :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Faisons la même chose pour la matrice $\hat{B}$. On voit qu'une des valeurs propres est $\lambda = 0$, les autres sont :

$$det(\hat{B} - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\lambda)((-\lambda)^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,\ \lambda = 2 \text{ et } \lambda = -2$$

On calcule les vecteurs propres. Pour $\lambda = 0$:

$$\hat{B}\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} -2iy = 0 \\ 2ix = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \text{ indéterminé} \end{cases} \quad \Rightarrow \; v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = 2$:

$$\hat{B}\phi = 2\phi \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2iy = 2x \\ 2ix = 2y \\ 0 = 2z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -iy \\ z = 0 \\ y \text{ indéterminé} \end{cases} \quad \Rightarrow \; v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et pour $\lambda = -2$:

$$\hat{B}\phi = -2\phi \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2iy = -2x \\ 2ix = -2y \\ 0 = -2z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = iy \\ z = 0 \\ y \text{ indéterminé} \end{cases} \quad \Rightarrow v_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exactement de la même façon, on trouve que les valeurs propres de $\hat{C}$ sont $\lambda = 0$, $\lambda = i$ et $\lambda = 2$, et les vecteurs propres associés sont

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_i = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i+1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il est intéressant de remarquer que les matrices $\hat{A}$ et $\hat{B}$ ont les mêmes vecteurs propres. Cela signifie donc que $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent $\Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = 0$.
Remarquez également que $\hat{A}$ et $\hat{B}$ ont forcément des valeurs propres réelles, contrairement à $\hat{C}$, car ils sont hermitiens.

c)
Définissons $|\psi\rangle$ un vecteur propre de $\hat{A}$. Ainsi, $\hat{A}|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle$. Puisque $\hat{A}$ est hermitien, $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ et donc, si on applique l'opérateur à gauche, sur le bra, cela revient au même que d'appliquer A à doite.

$$\begin{aligned} \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \quad &\Rightarrow \quad \langle\hat{A}\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}\psi\rangle \\ &\Rightarrow \quad \alpha^*\langle\psi|\psi\rangle = \alpha\langle\psi|\psi\rangle \\ &\Rightarrow \quad \alpha = \alpha * \\ &\Rightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Montrons maintenant que des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes seront orthogonaux si l'opérateur est hermitien. Soit $\hat{A}|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle$ et $\hat{A}|\phi\rangle = \beta|\phi\rangle$ avec bien sûr $\hat{A}$ hermitien. Alors, puisque $A = A^\dagger$, appliquer A à sur le ket ou A sur le bra revient au même :

$$\begin{aligned} \langle A\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\hat{A}\phi\rangle \quad &\Rightarrow \quad \alpha\langle\psi|\phi\rangle = \beta\langle\psi|\phi\rangle \\ &\Rightarrow \quad (\alpha - \beta)\langle\psi|\phi\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \langle\psi|\phi\rangle = 0 \quad \text{car} \quad \alpha \neq \beta \\ &\Rightarrow \quad \text{Les vecteurs sont orthogonaux} \end{aligned}$$

Exercice 5

a)
Pour commencer le calcul, il faut d'abord écrire $p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Pour faciliter le calcul du commutateur, appliquons-le à une fonction quelconque $f(x)$:

$$\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{p}]f(x) &= (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})f(x) \\
&= x\Big(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}f(x)\Big) + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(xf(x)) \\
&= -xi\hbar\frac{\partial}{\partial x}f(x) + i\hbar f(x) + i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}f(x) \\
&= i\hbar f(x).
\end{aligned}$$

Ainsi,$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

b)

$$\begin{aligned}
[f(\hat{x}), \hat{p}]g(x) &= (f(\hat{x})\hat{p} - \hat{p}f(\hat{x}))g(x) \\
&= f(x)\Big(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}g(x)\Big) + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(f(x)g(x)) \\
&= -f(x)i\hbar\frac{\partial}{\partial x}g(x) + i\hbar g(x)\frac{\partial}{\partial x}f(x) + i\hbar f(x)\frac{\partial}{\partial x}g(x) \\
&= i\hbar g(x)\frac{\partial}{\partial x}f(x).
\end{aligned}$$

Ainsi,$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\frac{\partial}{\partial x}f(x)$.

c)

$$\begin{aligned}
[\hat{x}^n, \hat{p}] &= \hat{x}[\hat{x}^{n-1}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x}^{n-1} \\
&= \hat{x}\left(\hat{x}[\hat{x}^{n-2}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x}^{n-2}\right) + i\hbar\hat{x}^{n-1} \\
&= \hat{x}^2[\hat{x}^{n-2}, \hat{p}] + 2i\hbar\hat{x}^{n-1} \\
&= \hat{x}^2\left(\hat{x}[\hat{x}^{n-3}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x}^{n-3}\right) + 2i\hbar\hat{x}^{n-1} \\
&= \hat{x}^3[\hat{x}^{n-3}, \hat{p}] + 3i\hbar\hat{x}^{n-1} \\
&= ... \\
&= \hat{x}^{n-1}[\hat{x}, \hat{p}] + (n-1)i\hbar\hat{x}^{n-1} \\
&= ni\hbar\hat{x}^{n-1}
\end{aligned}$$

Exercice 6

Premièrement, on sait que $\sigma_A^2 = \langle(A - \langle A\rangle)^2\rangle$. Alors,

$$\begin{aligned}
\sigma_A^2 &= \langle(A - \langle A\rangle)^2\rangle \\
&= \langle\psi|(A - \langle A\rangle)^2|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|(A - \langle A\rangle)(A - \langle A\rangle)|\psi\rangle \\
&= \langle(A - \langle A\rangle)^\dagger\psi|(A - \langle A\rangle)\psi\rangle \\
&= \langle(A - \langle A\rangle)\psi|(A - \langle A\rangle)\psi\rangle
\end{aligned}$$

Où on utilise le fait qu'un observable est un opérateur hermitien. On procède de même pour σ_B^2.

Posons maintenant $\sigma_A^2 = \langle f|f\rangle$ et $\sigma_B^2 = \langle g|g\rangle$. Alors,

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 = \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \geq |\langle f|g\rangle|^2$$

où la dernière égalité n'est rien d'autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Calculons maintenant $\langle f|g\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle f|g\rangle &= \langle (A-\langle A\rangle)\psi|(B-\langle B\rangle)\psi\rangle \\
&= \langle \psi|(A-\langle A\rangle)(B-\langle B\rangle)|\psi\rangle \\
&= \langle \psi|(AB - A\langle B\rangle - \langle A\rangle B + \langle A\rangle\langle B\rangle)|\psi\rangle \\
&= \langle \psi|AB|\psi\rangle - \langle \psi|A\langle B\rangle|\psi|\rangle - \langle \psi|\langle A\rangle B|\psi\rangle + \langle \psi|\langle A\rangle\langle B\rangle|\psi\rangle \\
&= \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle + \langle A\rangle\langle B\rangle \\
&= \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle
\end{aligned}$$

et de la même façon $\langle g|f\rangle = \langle BA\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$.

Maintenant, puisque

$$|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 = \left(\frac{z+z^*}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-z^*}{2i}\right)^2.$$

on a

$$\begin{aligned}
|\langle f|g\rangle|^2 &= \left(\frac{\langle f|g\rangle + \langle g|f\rangle}{2}\right)^2 + \left(\frac{\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle}{2i}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle + \langle BA\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle}{2}\right)^2 + \left(\frac{\langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle - \langle BA\rangle + \langle A\rangle\langle B\rangle}{2i}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\langle\{A,B\}\rangle - 2\langle A\rangle\langle B\rangle}{2}\right)^2 + \left(\frac{\langle[A,B]\rangle}{2i}\right)^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq |\langle f|g\rangle|^2 = \left(\frac{\langle\{A,B\}\rangle - 2\langle A\rangle\langle B\rangle}{2}\right)^2 + \left(\frac{\langle[A,B]\rangle}{2i}\right)^2$$