Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°3 : Oscillateur harmonique à trois dimensions (Partie 1)

1. Écrire l'équation de Schrödinger en coordonnées sphériques de l'oscillateur harmonique à trois dimensions.
2. Choisir $\hbar = m = \omega = 1$ et déterminer les unités de temps, d'énergie et de longueur. Puis par séparation des variables, écrire l'équation de Schrödinger radiale dans ces unités.
3. En utilisant les postulats, chercher la solution physique $u_l(r)$ de l'équation radiale :
   (a) Déterminer $u_{r\to\infty}(r)$, la solution approchée de l'équation de Schrödinger dans la régime asymptotique (obtenu en faisant tendre r vers l'infini).
   (b) Poser $u_l(r) = u_{r\to\infty}(r)v_l(r)$ et en déduire l'équation satisfaite par $v_l(r)$.
   (c) Autour du point singulier régulier $r = 0$, en posant le développement en série entière suivant
   $$v_l(r) = r^s \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, r^i, \quad a_0 \neq 0.$$
   en déduire le système d'équations pour les coefficients a_i.
   (d) Finallement, résoudre ce système d'équations en exprimant s et a_i en fonction des paramètres du problème.
   (e) Déterminer le rayon de convergence r_c de la série $\sum_{j=0}^{\infty} c_j\, r^j$ donné par
   $$\frac{1}{r_c} = \lim_{j\to\infty} \left|\frac{c_{j+1}}{c_j}\right|.$$
   Déduire du comportement asymptotique de la fonction d'onde une condition de quantification de l'énergie.
4. Étudier le spectre de ce problème : énergies, dégénérescences, représentation schématique des niveaux (introduire le nombre quantique "principal" n). Retrouver ces résultats à partir de l'oscillateur à une dimension.

http ://quic.ulb.ac.be, Evgueni.Karpov@ulb.ac.be, Christina.Giarmatzi@ulb.ac.be