Mécanique quantique I

Séance d'exercices n° 3 : Etats, Opérateurs et Commutateurs

1. Soient $\hat{A}, \hat{B}$ et $\hat{C}$ des opérateurs linéaires. Montrer que
   (a) $[\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}, \hat{C}] = \lambda[\hat{A}, \hat{C}] + \mu[\hat{B}, \hat{C}]$. (Linéarité)
   (b) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$. (Régle du produit)
   (c) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$. (Régle du produit)
   (d) $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$. (Identité de Jacobi)
2. Soient $\hat{A}, \hat{B}$ et $\hat{C}$ des opérateurs linéaires avec $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ et $[\hat{B}, \hat{C}] = 0$. Peut-on en déduire que $[\hat{A}, \hat{C}] = 0$?
3. Calculer la norme, le produit scalaire et en déduire la normalisation des vecteurs $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$:
   (a) dans le cas où $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathcal{E}_\mathcal{H}$ sont des vecteurs discrets, non-normés, mais orthogonaux.
   $$|\phi_1\rangle = a\,|v_1\rangle + ib\,|v_2\rangle\,,$$
   $$|\phi_2\rangle = a\,|v_1\rangle - ib\,|v_2\rangle$$
   (b) dans le cas où $\{|v_p\rangle\}$ sont des vecteurs continus et "orthogonaux", c'est-à-dire $\langle v_p|v'_p\rangle = \delta(p - p')$, où $\delta(x)$ est la distribution de Dirac qui satisfait
   $$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x-a) = f(a).$$
   $$|\phi_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^{a+\pi} dp\ |v_p\rangle \cos p,$$
   $$|\phi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^{a+\pi} dp\ |v_p\rangle \sin p.$$
4. Soient trois opérateurs linéaires dont la représentation matricielle est donnée par
   $$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$, sont-ils hermitiens ?
   (b) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$. Que remarquez vous ?
   (c) Montrer en toute généralité que les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont réelles. Puis, montrer que les vecteurs propres (de cet opérateur) pour des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
5. Soient $\hat{x}$ et $\hat{p}$ les opérateurs de position et de quantité de mouvement d'une particule à une dimension. Calculer $[\hat{x}, \hat{p}]$.

http ://quic.ulb.ac.be, Evgueni.Karpov@ulb.ac.be, ahertz@ulb.ac.be