

Mécanique quantique I

Séance d'exercices 3 : oscillateur harmonique et opérateurs d'échelle

1. Pour résoudre le problème de l'oscillateur harmonique à une dimension de manière algébrique, on introduit les opérateurs linéaires suivants (dans les unités naturelles) :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \text{ et } \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

où \hat{x} et \hat{p} sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement.

- \hat{a} et \hat{N} sont-ils hermitiens? Calculer le commutateur $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$. En déduire les commutateurs $[\hat{N}, \hat{a}]$ et $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger]$.
 - Réécrire, en unités naturelles, l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique en fonction de ces opérateurs.
 - Soit $|\lambda\rangle$ un état propre normalisé de \hat{N} de valeur propre λ . Montrer que $\lambda \geq 0$.
 - En utilisant les résultats (a) et (c), déduire que les états $\hat{a}|\lambda\rangle$ et $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$ sont aussi états propres de \hat{N} .
 - Calculer $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$ et $\hat{a}|\lambda\rangle$.
 - Finalement montrer que $\lambda \in \mathbf{N}$ et en déduire la quantification de l'énergie.
 - Trouver la représentation matricielle de \hat{a}^\dagger , \hat{a} , \hat{N} et \hat{H} dans la base propre de l'opérateur \hat{N} .
2. La quantification des équations de Maxwell associée à une onde électromagnétique dans une cavité fait apparaître un hamiltonien qui correspond à une somme d'oscillateurs harmoniques, où un oscillateur est associé à chaque mode du champs. Parmi les états quantiques possibles d'un seul mode du champs électromagnétique on peut considérer les *états cohérents* $|\alpha\rangle$ qui sont définis par

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

- (a) Montrer que

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle,$$

où $|0\rangle$ est le *vide* c'est à dire l'état à zéro photon.

- (b) Calculer la valeur moyenne de \hat{N} dans l'état $|\alpha\rangle$.