

## Mécanique quantique I

Séance d'exercices 3 : oscillateur harmonique et opérateurs d'échelle

1. Pour résoudre le problème de l'oscillateur harmonique à une dimension de manière algébrique, on introduit les opérateurs linéaires suivants (dans les unités naturelles) :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \text{ et } \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

où  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement.

- $\hat{a}$  et  $\hat{N}$  sont-ils hermitiens? Calculer le commutateur  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ . En déduire les commutateurs  $[\hat{N}, \hat{a}]$  et  $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger]$ .
  - Réécrire, en unités naturelles, l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique en fonction de ces opérateurs.
  - Soit  $|\lambda\rangle$  un état propre normalisé de  $\hat{N}$  de valeur propre  $\lambda$ . Montrer que  $\lambda \geq 0$ .
  - En utilisant les résultats (a) et (c), déduire que les états  $\hat{a}|\lambda\rangle$  et  $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$  sont aussi états propres de  $\hat{N}$ .
  - Calculer  $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$  et  $\hat{a}|\lambda\rangle$ .
  - Finalement montrer que  $\lambda \in \mathbf{N}$  et en déduire la quantification de l'énergie.
  - Trouver la représentation matricielle de  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}$ ,  $\hat{N}$  et  $\hat{H}$  dans la base propre de l'opérateur  $\hat{N}$ .
2. La quantification des équations de Maxwell associée à une onde électromagnétique dans une cavité fait apparaître un hamiltonien qui correspond à une somme d'oscillateurs harmoniques, où un oscillateur est associé à chaque mode du champ. Parmi les états quantiques possibles d'un seul mode du champs électromagnétique on peut considérer les *états cohérents*  $|\alpha\rangle$  qui sont définis par

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

- (a) Montrer que

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle,$$

où  $|0\rangle$  est le *vide* c'est à dire l'état à zéro photon.

- (b) Calculer la valeur moyenne de  $\hat{N}$  dans l'état  $|\alpha\rangle$ .