

## Mécanique Quantique 1 — CORRIGÉ

### Séance d'exercices 3 : oscillateur harmonique et opérateurs d'échelle

#### Exercice 1

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}) \quad \text{et} \quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

ICI on a trouvé la valeur de  $\hat{a}^\dagger$  simplement en utilisant le fait que  $x$  et  $p$  sont des observables et sont donc hermitiens.<sup>1</sup>

a)

Clairement,  $\hat{a}^\dagger \neq \hat{a}$ . Ainsi,  $\hat{a}$  n'est pas hermitien. Par contre,

$$\hat{N}^\dagger = (\hat{a}^\dagger \hat{a})^\dagger = \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{N}$$

et donc  $\hat{N}$ , lui, est hermitien.

Calculons le commutateur de  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  en se souvenant que  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar = i$ , car on est dans les unités naturelles ( $\hbar = m = \omega = 1$ ) :

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( [\hat{x}, \hat{x}] - i[\hat{x}, \hat{p}] + i[\hat{p}, \hat{x}] + [\hat{p}, \hat{p}] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 0 - i i + i(-i) + 0 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

À partir de là on peut maintenant calculer  $[\hat{N}, \hat{a}]$  et  $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger]$

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{a}] &= [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] \\ &= \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger (0) - [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{a} \\ &= -(1) \hat{a} \\ &= -\hat{a} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] &= [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] \\ &= \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] \hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger (1) - 0 \\ &= \hat{a}^\dagger \end{aligned}$$

---

1. On peut montrer que  $p$  est hermitien en montrant que  $\langle \phi | p \psi \rangle = \langle p \phi | \psi \rangle$  :

$$\langle \phi | p \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x) \left( -i\hbar \frac{d\psi(x)}{dx} \right) dx = -i\hbar \left( \phi^*(x) \psi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d\phi^*(x)}{dx} \right) \psi(x) dx \right) = 0 + \int \left( \frac{-i\hbar d\phi(x)}{dx} \right)^* \psi(x) dx = \langle p \phi | \psi \rangle$$

Dans ce calcul, on utilise l'intégration par partie et le fait que la fonction d'onde doit tendre vers 0 à  $\pm\infty$ .

b)

On se souvient que l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique a la forme

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \frac{\hat{p}^2 + \hat{x}^2}{2}$$

où le membre de droite est simplement l'hamiltonien réécrit dans les unités naturelles. Voyons deux méthodes pour écrire cet hamiltonien en fonctions des opérateurs introduit précédemment.

Méthode 1 :

En se servant des équations de  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  en fonction de  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$ , on peut réécrire les équation pour cette fois mettre en évidence la dépendance de  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  en fonction de  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$ . On obtient alors

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad \hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

Ainsi, l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2 + \hat{x}^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 + \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( -(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}) + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= \frac{1}{2} ([\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2\hat{N}) \\ &= \frac{1}{2} + \hat{N} \end{aligned}$$

Méthode 2 :

Calculons le produit  $(\hat{x} - i\hat{p})(\hat{x} + i\hat{p})$  :

$$(\hat{x} - i\hat{p})(\hat{x} + i\hat{p}) = \hat{x}^2 + i\hat{x}\hat{p} - i\hat{p}\hat{x} + \hat{p}^2$$

où il ne faut pas oublier que  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  ne commutent pas, ce qui fait qu'on ne peut pas écrire ce produit en utilisant l'identité bien connue  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

Alors, on peut maintenant écrire

$$\hat{x}^2 + \hat{p}^2 = (\hat{x} - i\hat{p})(\hat{x} + i\hat{p}) - i\hat{x}\hat{p} + i\hat{p}\hat{x} = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \right) - i[\hat{x}, \hat{p}] = 2\hat{a}^\dagger\hat{a} - i(i) = 2\hat{N} + 1$$

où encore une fois  $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ , car on est dans les unités naturelles.

Maintenant, l'exercice est presque fini et on trouve :

$$H = \frac{\hat{p}^2 + \hat{x}^2}{2} = \hat{N} + \frac{1}{2}$$

c)

Par hypothèse, on a

$$\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \quad \text{et} \quad \langle\lambda|\lambda\rangle = 1$$

On peut alors déduire que

$$\langle\lambda|\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda\langle\lambda|\lambda\rangle = \lambda$$

D'autre part, puisque  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ , on peut écrire

$$\langle\lambda|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\lambda\rangle = \lambda$$

Remarquons maintenant que si on pose  $|\psi\rangle = \hat{a}|\lambda\rangle$ , alors forcément,  $\langle\psi| = \langle\lambda|\hat{a}^\dagger$ . Ainsi,

$$\langle\lambda|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\lambda\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = \|\psi\|^2$$

Donc  $\lambda = \|\psi\|^2$ . Mais comme une norme est toujours positive ou égale à 0, notre valeur propre  $\lambda$  est également positive ou égale à 0.

d)

Si  $\hat{a}|\lambda\rangle$  et  $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$  sont des états propres de  $\hat{N}$ , alors on doit trouver

$$\hat{N}\hat{a}|\lambda\rangle = \mu\hat{a}|\lambda\rangle \quad \text{et} \quad \hat{N}\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle = \eta\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$$

Calculons donc pour voir ce qu'on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{N}\hat{a}|\lambda\rangle &= (\hat{N}\hat{a} + \hat{a}\hat{N} - \hat{a}\hat{N})|\lambda\rangle & \hat{N}\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle &= (\hat{N}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{N} - \hat{a}^\dagger\hat{N})|\lambda\rangle \\ &= ([\hat{N}, \hat{a}] + \hat{a}\hat{N})|\lambda\rangle & &= ([\hat{N}, \hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger\hat{N})|\lambda\rangle \\ &= (-\hat{a} + \hat{a}\hat{N})|\lambda\rangle & &= (\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{N})|\lambda\rangle \\ &= \hat{a}\hat{N}|\lambda\rangle - \hat{a}|\lambda\rangle & &= \hat{a}^\dagger\hat{N}|\lambda\rangle + \hat{a}^\dagger|\lambda\rangle \\ &= \hat{a}\lambda|\lambda\rangle - \hat{a}|\lambda\rangle & &= \hat{a}^\dagger\lambda|\lambda\rangle + \hat{a}^\dagger|\lambda\rangle \\ &= (\lambda - 1)\hat{a}|\lambda\rangle & &= (\lambda + 1)\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle \end{aligned}$$

Ainsi,  $\hat{a}|\lambda\rangle$  et  $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$  sont bien des vecteurs propres avec pour valeurs propres respectives  $(\lambda - 1)$  et  $(\lambda + 1)$ .

e)

Si on applique  $\hat{N}$  à  $\hat{a}|\lambda\rangle$ , on obtient

$$\hat{N}\hat{a}|\lambda\rangle = (\lambda - 1)\hat{a}|\lambda\rangle$$

où  $\hat{a}|\lambda\rangle$  est un vecteur propre de  $\hat{N}$  ayant pour valeur propre  $\lambda - 1$ . D'autre part, puisque  $\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ , on a que

$$\hat{N}|\lambda - 1\rangle = (\lambda - 1)|\lambda - 1\rangle$$

Ainsi, on obtient deux vecteurs propres avec les mêmes valeurs propres. Puisqu'il est possible de montrer que le spectre est non dégénéré (voir preuve dans C. Cohen-Tannoudji et al. *Mécanique quantique*, Hermann, Paris, p. 493), cela implique que ces deux vecteurs sont proportionnels :

$$\hat{a}|\lambda\rangle = \mu|\lambda - 1\rangle \quad \mu \in \mathbb{C}$$

Définissons  $|\psi\rangle = \hat{a}|\lambda\rangle$  et calculons la norme de  $|\psi\rangle$  :

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\lambda|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\lambda\rangle = \langle\lambda|\hat{N}|\lambda\rangle = \langle\lambda|\lambda|\lambda\rangle = \lambda$$

Mais si on utilise le fait que  $\hat{a}|\lambda\rangle = \mu|\lambda-1\rangle$ , alors la norme s'écrit :

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\lambda-1|\mu^*\mu|\lambda-1\rangle = \langle\lambda-1||\mu|^2|\lambda-1\rangle = |\mu|^2$$

Alors,  $|\mu|^2 = \lambda \Leftrightarrow \mu = e^{i\phi}\sqrt{\lambda}$ . Par simplicité, on choisit  $\mu = \sqrt{\lambda}$ . Par conséquent,

$$\hat{a}|\lambda\rangle = \sqrt{\lambda}|\lambda-1\rangle$$

Exactement de la même façon, si on applique  $\hat{N}$  à  $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$ , on obtient

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle = (\lambda+1)\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$$

D'autre part, puisque  $\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ , on a que

$$\hat{N}|\lambda+1\rangle = (\lambda+1)|\lambda+1\rangle$$

Ainsi, on obtient deux vecteurs propres avec les mêmes valeurs propres. Cela implique donc que ces deux vecteurs sont proportionnels :

$$\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle = \eta|\lambda+1\rangle \quad \eta \in \mathbb{C}$$

Définissons  $|\psi\rangle = \hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$  et calculons la norme de  $|\psi\rangle$  :

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\lambda|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle = \langle\lambda|\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}|\lambda\rangle = \langle\lambda|[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + \hat{N}|\lambda\rangle = \langle\lambda|1 + \hat{N}|\lambda\rangle = \langle\lambda|(1 + \lambda)|\lambda\rangle = 1 + \lambda$$

Mais si on utilise le fait que  $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle = \eta|\lambda+1\rangle$ , alors la norme s'écrit :

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\lambda+1|\eta^*\eta|\lambda+1\rangle = \langle\lambda+1||\eta|^2|\lambda+1\rangle = |\eta|^2$$

Alors,  $|\eta|^2 = \lambda + 1 \Leftrightarrow \eta = e^{i\phi}\sqrt{\lambda+1}$ . Par simplicité, on choisit  $\eta = \sqrt{\lambda+1}$ . Par conséquent,

$$\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle = \sqrt{\lambda+1}|\lambda+1\rangle$$

f)

Supposons que  $\lambda$  soit un entier, il y aura alors un certain  $n$  pour lequel  $\lambda = n$ . On aura alors, à ce moment là

$$\hat{a}^n|\lambda\rangle = \hat{a}^n|n\rangle = \hat{a}^{n-1}\sqrt{n}|n-1\rangle = \hat{a}^{n-2}\sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle = \dots = \sqrt{n!}|0\rangle$$

$$\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle = \hat{a}^{n+1}|n\rangle = \hat{a}\hat{a}^n|n\rangle = \hat{a}\sqrt{n!}|0\rangle = 0$$

et tous les états suivants, seront nuls. Maintenant, supposons que  $\lambda$  ne soit pas entier. Prenons, sans perdre de généralité, que  $\lambda = n + \epsilon$  où  $\epsilon \in \mathbb{R}$  et  $0 < \epsilon < 1$ . Alors,

$$\hat{a}^n|\lambda\rangle = \hat{a}^n|n+\epsilon\rangle = \hat{a}^{n-1}\sqrt{n+\epsilon}|n+\epsilon-1\rangle = \hat{a}^{n-2}\sqrt{(n+\epsilon)(n+\epsilon-1)}|n+\epsilon-2\rangle = \dots = \sqrt{\frac{(n+\epsilon)!}{\epsilon!}}|\epsilon\rangle$$

$$\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle = \hat{a}^{n+1}|n+\epsilon\rangle = \hat{a}\hat{a}^n|n+\epsilon\rangle = \hat{a}\sqrt{\frac{(n+\epsilon)!}{\epsilon!}}|\epsilon\rangle = \sqrt{\frac{(n+\epsilon)!}{\epsilon!}}\sqrt{\epsilon}|\epsilon-1\rangle$$

Appliquons maintenant l'opérateur  $\hat{N}$  au vecteur  $\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle$ . Si  $\lambda = n$ , un entier, alors

$$\hat{N}\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle = \hat{N}\hat{a}^{n+1}|n\rangle = \hat{N}0 = 0 = 0 \hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle$$

Par contre, si  $\lambda = n + \epsilon$

$$\hat{N}\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle = \hat{N}\hat{a}^{n+1}|n + \epsilon\rangle = \hat{N}\sqrt{\frac{(n + \epsilon)!}{\epsilon!}}\sqrt{\epsilon}|\epsilon - 1\rangle = (\epsilon - 1)\sqrt{\frac{(n + \epsilon)!}{\epsilon!}}\sqrt{\epsilon}|\epsilon - 1\rangle = (\epsilon - 1)\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle$$

ce qui signifie qu, dans le premier cas, la valeur propre de  $\hat{N}$  associée au vecteur propre  $\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle$  est 0, alors que dans le deuxième cas c'est  $\epsilon - 1$ . Seulement, puisque  $\epsilon < 1$ , la valeur propre est négative, ce qui entre en contradiction avec le fait, prouvé précédemment, que les valeurs propres sont toutes plus grandes ou égales à 0. Ainsi,  $\lambda \in \mathbb{N}$ . On peut alors en déduire la quantification de l'énergie. En effet, on a trouvé en b) que  $\hat{H} = (\hat{N} + 1/2)$  et donc

$$\hat{H}|\lambda\rangle = \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)|\lambda\rangle = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)|\lambda\rangle$$

Ainsi, les valeurs propres de l'hamiltonien, c'est-à-dire les différentes énergies possible sont quantifiées.

g)

Maintenant qu'on sait que les  $\lambda$  sont des nombres entiers, on choira plutôt de représenter la base des vecteurs propres de  $\hat{N}$  par  $|n\rangle$ . Notez que comme  $n \in [0, \infty)$ , l'espace d'Hilbert associé est de dimension infinie. Ainsi, sous forme de vecteurs, la base s'exprime comme

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad etc.$$

Comme  $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ , on a

$$\hat{N}|0\rangle = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \hat{N}|1\rangle = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \hat{N}|2\rangle = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad etc.$$

et on en déduit donc que

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

De façon plus simple, on peut dire que les éléments de la matrice  $\hat{N}$  sont  $N_{ij} = \delta_{ij}(j - 1)$ .

Pour ce qui est de l'opérateur  $\hat{a}$ , on sait que  $\hat{a}|0\rangle = 0$ ,  $\hat{a}|1\rangle = \sqrt{1}|0\rangle$ ,  $\hat{a}|2\rangle = \sqrt{2}|1\rangle$ ,  $\hat{a}|3\rangle = \sqrt{3}|2\rangle$ , etc. On en déduit donc

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Si jamais ce n'est pas tout de suite évident pour vous que la matrice peut s'écrire ainsi, alors apprenez simplement que pour tout opérateur  $\hat{\theta}$  qu'on veut écrire sous forme de matrice, l'élément  $\theta_{ij}$  de la matrice sera donné par

$$\theta_{ij} = \langle i | \hat{\theta} | j \rangle$$

Pour ce qui est de l'opérateur  $\hat{a}^\dagger$ , on sait que  $\hat{a}^\dagger|0\rangle = \sqrt{1}|1\rangle$ ,  $\hat{a}^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$ ,  $\hat{a}^\dagger|2\rangle = \sqrt{3}|3\rangle$ , etc. On en déduit donc

$$\hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

De façon plus simple, puisque  $\hat{a}^\dagger$  est simplement l'opérateur transposé, conjugué de  $\hat{a}$ , il suffit de prendre la transposée, conjuguée de la matrice qui représente  $\hat{a}$ .

Finalement, puisque  $\hat{H} = \hat{N} + \frac{1}{2}$ , on a

$$\hat{H} = \hat{N} + \frac{1}{2}\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 7/2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

## Exercice 2

a)

Pour montrer que  $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$ , vérifions que ce vecteur est bien un vecteur propre de  $\hat{a}$  avec comme valeur propre  $\alpha$ . Pour cela, on développe la deuxième exponentielle en série :

$$e^{\alpha\hat{a}^\dagger} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^k}{k!}$$

On peut alors réécrire notre état comme

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^k}{k!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left( 1 + \alpha\hat{a}^\dagger + \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^2}{2!} + \dots \right) |0\rangle$$

Mais on sait que

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger|0\rangle &= |1\rangle \\ (\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle &= \hat{a}^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle \\ (\hat{a}^\dagger)^3|0\rangle &= \hat{a}^\dagger\sqrt{2}|2\rangle = \sqrt{6}|3\rangle \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^k}{k!} |0\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left( 1 + \alpha \hat{a}^\dagger + \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^2}{2!} + \dots \right) |0\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left( |0\rangle + \alpha \sqrt{1} |1\rangle + \frac{\alpha^2 \sqrt{2!} |2\rangle}{2!} + \frac{\alpha^3 \sqrt{3!} |3\rangle}{3!} + \dots \right) \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left( |0\rangle + \alpha \sqrt{1} |1\rangle + \frac{\alpha^2 |2\rangle}{\sqrt{2!}} + \frac{\alpha^3 |3\rangle}{\sqrt{3!}} + \dots \right) \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle
\end{aligned}$$

On peut applique  $\hat{a}$  à ce résultat :

$$\begin{aligned}
\hat{a}|\alpha\rangle &= \hat{a} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \hat{a} |k\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \sqrt{k} |k-1\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{(k-1)!}} |k-1\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{\alpha^{j+1}}{\sqrt{j!}} |j\rangle \quad \text{en posant } j = k-1 \\
&= \alpha e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{\sqrt{j!}} |j\rangle \\
&= \alpha |\alpha\rangle
\end{aligned}$$

où on a commencé la somme à 0, car le terme avec  $j = -1$  est nul. Ainsi, puisque  $|\alpha\rangle$  est bien un vecteur propre de  $\hat{a}$ , notre définition est valable.

b)

La valeur moyenne de  $\hat{N}$  dans les états  $|\alpha\rangle$  est définie comme

$$\begin{aligned}
\langle \hat{N} \rangle &= \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle \\
&= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle \\
&= \langle \alpha | \alpha^* \alpha | \alpha \rangle \\
&= |\alpha|^2 \langle \alpha | \alpha \rangle \\
&= |\alpha|^2
\end{aligned}$$

car  $|\alpha\rangle$  est normalisé. En effet,

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k (\alpha^*)^j}{\sqrt{k!j!}} \langle j|k\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k (\alpha^*)^j}{\sqrt{k!j!}} \delta_{jk} \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha!^{2k}}{k!} \\ &= e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2} \\ &= 1\end{aligned}$$