Mécanique Quantique 1 —– CORRIGÉ

Séance d'exercices 3 : oscillateur harmonique et opérateurs d'échelle

Exercice 1

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}) \qquad \text{et} \qquad \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

IcI on a trouvé la valeur de $a^\dagger$ simplement en utilisant le fait que x et p sont des observables et sont donc hermitiens.[1]

a)
Clairement, $\hat{a}^\dagger \neq \hat{a}$. Ainsi, $\hat{a}$ n'est pas hermitien. Par contre,

$$\hat{N}^\dagger = (\hat{a}^\dagger \hat{a})^\dagger = \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{N}$$

et donc $\hat{N}$, lui, est hermitien.
Calculons le commutateur de $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ en se souvenant que $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar = i$, car on est dans les unités naturelles ($\hbar = m = \omega = 1$) :

$$\begin{aligned}
[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \Big[\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p})\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big([\hat{x}, \hat{x}] - i[\hat{x}, \hat{p}] + i[\hat{p}, \hat{x}] + [\hat{p}, \hat{p}]\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(0 - i\,i + i\,(-i) + 0\Big) \\
&= 1
\end{aligned}$$

À partir de là on peut maintenant calculer $[\hat{N}, \hat{a}]$ et $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger]$

$$\begin{aligned}
[\hat{N}, \hat{a}] &= [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] \\
&= \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{a} \\
&= \hat{a}^\dagger (0) - [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\hat{a} \\
&= -(1)\hat{a} \\
&= -\hat{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] &= [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] \\
&= \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger]\hat{a} \\
&= \hat{a}^\dagger (1) - 0 \\
&= \hat{a}^\dagger
\end{aligned}$$

1. On peut montrer que p est hermitien en montrant que $\langle \phi | p\, \psi \rangle = \langle p\phi | \psi \rangle$:

$$\langle \phi | p\, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d\psi(x)}{dx}\right) dx = -i\hbar \left(\phi^*(x)\psi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\phi^*(x)}{dx}\right) \psi(x) dx\right) = 0 + \int \left(\frac{-i\hbar d\phi(x)}{dx}\right)^* \psi(x) dx = \langle p\phi | \psi \rangle$$

Dans ce calcul, on utilise l'intérgation par partie et le fait que la fonction d'onde doit tendre vers 0 à $\pm\infty$.

b)
On se souvient que l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique a la forme

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \frac{\hat{p}^2 + \hat{x}^2}{2}$$

où le membre de droite est simplement l'hamiltonien réécrit dans les unités naturelles. Voyons deux méthodes pour écrire cet hamiltonien en fonctions des opérateurs introduit précédemment.

<u>Méthode 1 :</u>
En se servant des équations de $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ en fonction de $\hat{x}$ et $\hat{p}$, on peut réécrire les équation pour cette fois mettre en évidence la dépendance de $\hat{x}$ et $\hat{p}$ en fonction de $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$. On obtient alors

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \qquad \hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

Ainsi, l'hamiltonien devient

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2 + \hat{x}^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 + \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(-(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}) + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big([\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 + 2\hat{N}\Big) \\
&= \frac{1}{2} + \hat{N}
\end{aligned}$$

<u>Méthode 2 :</u>
Calculons le produit $(\hat{x} - i\hat{p})(\hat{x} + i\hat{p})$:

$$(\hat{x} - i\hat{p})(\hat{x} + i\hat{p}) = \hat{x}^2 + i\hat{x}\hat{p} - i\hat{p}\hat{x} + \hat{p}^2$$

où il ne faut pas oublier que $\hat{x}$ et $\hat{p}$ ne commutent pas, ce qui fait qu'on ne peut pas écrire ce produit en utilisant l'identité bien connue $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
Alors, on peut maintenant écrire

$$\hat{x}^2 + \hat{p}^2 = (\hat{x} - i\hat{p})(\hat{x} + i\hat{p}) - i\hat{x}\hat{p} + i\hat{p}\hat{x} = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p})\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p})\Big) - i[\hat{x}, \hat{p}] = 2\hat{a}^\dagger\hat{a} - i(i) = 2\hat{N} + 1$$

où encore une fois $[\hat{x}, \hat{p}] = i$, car on est dans les unités naturelles.
Maintenant, l'exercice est presque fini et on trouve :

$$H = \frac{\hat{p}^2 + \hat{x}^2}{2} = \hat{N} + \frac{1}{2}$$

c)
Par hypothèse, on a
$$\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \qquad \text{et} \qquad \langle\lambda|\lambda\rangle = 1$$
On peut alors déduire que
$$\langle\lambda|\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda\langle\lambda|\lambda\rangle = \lambda$$
D'autre part, puisque $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, on peut écrire
$$\langle\lambda|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\lambda\rangle = \lambda$$
Remarquons maintenant que si on pose $|\psi\rangle = \hat{a}|\lambda\rangle$, alors forcément, $\langle\psi| = \langle\lambda|\hat{a}^\dagger$. Ainsi,
$$\langle\lambda|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\lambda\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = ||\psi||^2$$
Donc $\lambda = ||\psi||^2$. Mais comme une norme est toujours positive ou égale à 0, notre valeur propre λ est également pus grande ou égale à 0.

d)
Si $\hat{a}|\lambda\rangle$ et $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$ sont des états propres de $\hat{N}$, alors on doit trouver
$$\hat{N}\hat{a}|\lambda\rangle = \mu\hat{a}|\lambda\rangle \qquad \text{et} \qquad \hat{N}\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle = \eta\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$$
Calculons donc pour voir ce qu'on obtient :
$$\begin{aligned}
\hat{N}\hat{a}|\lambda\rangle &= \Big(\hat{N}\hat{a} + \hat{a}\hat{N} - \hat{a}\hat{N}\Big)|\lambda\rangle \\
&= \Big([\hat{N},\hat{a}] + \hat{a}\hat{N}\Big)|\lambda\rangle \\
&= \Big(-\hat{a} + \hat{a}\hat{N}\Big)|\lambda\rangle \\
&= \hat{a}\hat{N}|\lambda\rangle - \hat{a}|\lambda\rangle \\
&= \hat{a}\lambda|\lambda\rangle - \hat{a}|\lambda\rangle \\
&= (\lambda-1)\hat{a}|\lambda\rangle
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\hat{N}\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle &= \Big(\hat{N}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{N} - \hat{a}^\dagger\hat{N}\Big)|\lambda\rangle \\
&= \Big([\hat{N},\hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger\hat{N}\Big)|\lambda\rangle \\
&= \Big(\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{N}\Big)|\lambda\rangle \\
&= \hat{a}^\dagger\hat{N}|\lambda\rangle + \hat{a}^\dagger|\lambda\rangle \\
&= \hat{a}^\dagger\lambda|\lambda\rangle + \hat{a}^\dagger|\lambda\rangle \\
&= (\lambda+1)\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle
\end{aligned}$$
Ainsi, $\hat{a}|\lambda\rangle$ et $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$ sont bien des vecteurs propres avec pour valeurs propres respectives $(\lambda-1)$ et $(\lambda+1)$.

e)
Si on applique $\hat{N}$ à $\hat{a}|\lambda\rangle$, on obtient
$$\hat{N}\hat{a}|\lambda\rangle = (\lambda-1)\hat{a}|\lambda\rangle$$
où $\hat{a}|\lambda\rangle$ est un vecteur propre de $\hat{N}$ ayant pour valeur propre $\lambda-1$. D'autre part, puisque $\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, on a que
$$\hat{N}|\lambda-1\rangle = (\lambda-1)|\lambda-1\rangle$$
Ainsi, on obtient deux vecteurs propres avec les mêmes valeurs propres. Puisqu'il est possible de montrer que le spectre est non dégénéré (voir preuve dans C. Cohen-Tannoudji et al. *Mécanique quantique*, Hermann, Paris, p. 493), cela implique que ces deux vecteurs sont proportionnels :
$$\hat{a}|\lambda\rangle = \mu|\lambda-1\rangle \qquad \mu\in\mathbb{C}$$

Définissons $|\psi\rangle = \hat{a}|\lambda\rangle$ et calculons la norme de $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\lambda|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\lambda\rangle = \langle\lambda|\hat{N}|\lambda\rangle = \langle\lambda|\lambda|\lambda\rangle = \lambda$$

Mais si on utilise le fait que $\hat{a}|\lambda\rangle = \mu|\lambda-1\rangle$, alors la norme s'écrit :

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\lambda-1|\mu^*\mu|\lambda-1\rangle = \langle\lambda-1||\mu|^2|\lambda-1\rangle = |\mu|^2$$

Alors, $|\mu|^2 = \lambda \Leftrightarrow \mu = e^{i\phi}\sqrt{\lambda}$. Par simplicité, on choisit $\mu = \sqrt{\lambda}$. Par conséquent,

$$\hat{a}|\lambda\rangle = \sqrt{\lambda}|\lambda-1\rangle$$

Exactement de la même façon, si on applique $\hat{N}$ à $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$, on obtient

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle = (\lambda+1)\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$$

D'autre part, puisque $\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, on a que

$$\hat{N}|\lambda+1\rangle = (\lambda+1)|\lambda+1\rangle$$

Ainsi, on obtient deux vecteurs propres avec les mêmes valeurs propres. Cela implique donc que ces deux vecteurs sont proportionnels :

$$\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle = \eta|\lambda+1\rangle \qquad \eta \in \mathbb{C}$$

Définissons $|\psi\rangle = \hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$ et calculons la norme de $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\lambda|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle = \langle\lambda|\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}|\lambda\rangle = \langle\lambda|[\hat{a},\hat{a}^\dagger] + \hat{N}|\lambda\rangle = \langle\lambda|1+\hat{N}|\lambda\rangle = \langle\lambda|(1+\lambda)|\lambda\rangle = 1+\lambda$$

Mais si on utilise le fait que $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle = \eta|\lambda+1\rangle$, alors la norme s'écrit :

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\lambda+1|\eta^*\eta|\lambda+1\rangle = \langle\lambda+1||\eta|^2|\lambda+1\rangle = |\eta|^2$$

Alors, $|\eta|^2 = \lambda+1 \Leftrightarrow \eta = e^{i\phi}\sqrt{\lambda+1}$. Par simplicité, on choisit $\eta = \sqrt{\lambda+1}$. Par conséquent,

$$\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle = \sqrt{\lambda+1}|\lambda+1\rangle$$

f)
Supposons que λ soit un entier, il y aura alors un certain n pour lequel $\lambda = n$. On aura alors, à ce moment là

$$\hat{a}^n|\lambda\rangle = \hat{a}^n|n\rangle = \hat{a}^{n-1}\sqrt{n}|n-1\rangle = \hat{a}^{n-2}\sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle = ... = \sqrt{n!}|0\rangle$$

$$\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle = \hat{a}^{n+1}|n\rangle = \hat{a}\hat{a}^n|n\rangle = \hat{a}\sqrt{n!}|0\rangle = 0$$

et tous les états suivants, seront nuls. Maintenant, supposons que λ ne soit pas entier. Prenons, sans perdre de généralité, que $\lambda = n+\epsilon$ où $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $0 < \epsilon < 1$. Alors,

$$\hat{a}^n|\lambda\rangle = \hat{a}^n|n+\epsilon\rangle = \hat{a}^{n-1}\sqrt{n+\epsilon}|n+\epsilon-1\rangle = \hat{a}^{n-2}\sqrt{(n+\epsilon)(n+\epsilon-1)}|n+\epsilon-2\rangle = ... = \sqrt{\frac{(n+\epsilon)!}{\epsilon!}}|\epsilon\rangle$$

$$\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle = \hat{a}^{n+1}|n+\epsilon\rangle = \hat{a}\hat{a}^n|n+\epsilon\rangle = \hat{a}\sqrt{\frac{(n+\epsilon)!}{\epsilon!}}|\epsilon\rangle = \sqrt{\frac{(n+\epsilon)!}{\epsilon!}}\sqrt{\epsilon}|\epsilon-1\rangle$$

Appliquons maintenant l'opérateur $\hat{N}$ au vecteur $\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle$. Si $\lambda = n$, un entier, alors

$$\hat{N}\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle = \hat{N}\hat{a}^{n+1}|n\rangle = \hat{N}0 = 0 = 0\ \hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle$$

Par contre, si $\lambda = n + \epsilon$

$$\hat{N}\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle = \hat{N}\hat{a}^{n+1}|n+\epsilon\rangle = \hat{N}\sqrt{\frac{(n+\epsilon)!}{\epsilon!}}\sqrt{\epsilon}|\epsilon-1\rangle = (\epsilon-1)\sqrt{\frac{(n+\epsilon)!}{\epsilon!}}\sqrt{\epsilon}|\epsilon-1\rangle = (\epsilon-1)\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle$$

ce qui signifie qu, dans le premier cas, la valeur propre de $\hat{N}$ associée au vecteur propre $\hat{a}^{n+1}|\lambda\rangle$ est 0, alors que dans le deuxième cas c'est $\epsilon - 1$. Seulement, puisque $\epsilon < 1$, la valeur propre est négative, ce qui entre en contradiction avec le fait, prouvé précédemment, que les valeurs propres sont toutes plus grandes ou égales à 0. Ainsi, $\lambda \in \mathbb{N}$. On peut alors en déduire la quantification de l'énergie. En effet, on a trouvé en b) que $\hat{H} = (\hat{N} + 1/2)$ et donc

$$\hat{H}|\lambda\rangle = \Big(\hat{N} + \frac{1}{2}\Big)|\lambda\rangle = \Big(\lambda + \frac{1}{2}\Big)|\lambda\rangle$$

Ainsi, les valeurs propres de l'hamiltonien, c'est-à-dire les différentes énergies possible sont quantifiées.

g)

Maintenant qu'on sait que les λ sont des nombres entiers, on choira plutôt de représenter la base des vecteurs propres de $\hat{N}$ par $|n\rangle$. Notez que comme $n \in [0, \infty)$, l'espace d'Hilbert associé est de dimension infinie. Ainsi, sous forme de vecteurs, la base s'exprime comme

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix} \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix} \qquad etc.$$

Comme $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$, on a

$$\hat{N}|0\rangle = 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix} \qquad \hat{N}|1\rangle = 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix} \qquad \hat{N}|2\rangle = 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix} \qquad etc.$$

et on en déduit donc que

$$\hat{N} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

De façon plus simple, on peut dire que les éléments de la matrice $\hat{N}$ sont $N_{ij} = \delta_{ij}(j-1)$.

Pour ce qui est de l'opérateur $\hat{a}$, on sait que $\hat{a}|0\rangle = 0$, $\hat{a}|1\rangle = \sqrt{1}|0\rangle$, $\hat{a}|2\rangle = \sqrt{2}|1\rangle$, $\hat{a}|3\rangle = \sqrt{3}|2\rangle$, etc. On en déduit donc

$$\hat{a} = \begin{pmatrix}0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

Si jamais ce n'est pas tout de suite évident pour vous que la matrice peut s'écrire ainsi, alors apprenez simplement que pour tout opérateur $\hat{\theta}$ qu'on veut écrire sous forme de matrice, l'élément $\theta_{i\,j}$ de la matrice sera donné par

$$\theta_{i\,j} = \langle i|\hat{\theta}|j\rangle$$

Pour ce qui est de l'opérateur $\hat{a}^\dagger$, on sait que $\hat{a}^\dagger|0\rangle = \sqrt{1}|1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$, $\hat{a}^\dagger|2\rangle = \sqrt{3}|3\rangle$, etc. On en déduit donc

$$\hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

De façon plus simple, puisque $\hat{a}^\dagger$ est simplement l'opérateur transposé, conjugué de $\hat{a}$, il suffit de prendre la transposée, conjuguée de la matrice qui représente $\hat{a}$.
Finalement, puisque $\hat{H} = \hat{N} + \frac{1}{2}$, on a

$$\hat{H} = \hat{N} + \frac{1}{2}\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 7/2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exercice 2

a)

Pour montrer que $|\alpha\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$, vérifions que ce vecteur est bien un vecteur propre de $\hat{a}$ avec comme valeur propreα. Pour cela, on développe la deuxième exponentielle en série :

$$e^{\alpha\hat{a}^\dagger} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^k}{k!}$$

On peut alors réécrire notre état comme

$$|\alpha\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^k}{k!}|0\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \Big(1 + \alpha\hat{a}^\dagger + \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^2}{2!} + \dots\Big)|0\rangle$$

Mais on sait que

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger|0\rangle &= |1\rangle \\ (\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle &= \hat{a}^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle \\ (\hat{a}^\dagger)^3|0\rangle &= \hat{a}^\dagger\sqrt{2}|2\rangle = \sqrt{6}|3\rangle \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^k}{k!} |0\rangle \\
&= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \Big(1 + \alpha \hat{a}^\dagger + \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^2}{2!} + \dots \Big) |0\rangle \\
&= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \Big(|0\rangle + \alpha \sqrt{1} |1\rangle + \frac{\alpha^2 \sqrt{2!} |2\rangle}{2!} + \frac{\alpha^3 \sqrt{3!} |3\rangle}{3!} + \dots \Big) \\
&= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \Big(|0\rangle + \alpha \sqrt{1} |1\rangle + \frac{\alpha^2 |2\rangle}{\sqrt{2!}} + \frac{\alpha^3 |3\rangle}{\sqrt{3!}} + \dots \Big) \\
&= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle
\end{aligned}$$

On peut applique $\hat{a}$ à ce résultat :

$$\begin{aligned}
\hat{a}|\alpha\rangle &= \hat{a}\, e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle \\
&= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \hat{a} |k\rangle \\
&= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \sqrt{k} |k-1\rangle \\
&= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{(k-1)!}} |k-1\rangle \\
&= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{\alpha^{j+1}}{\sqrt{j!}} |j\rangle \quad \text{en posant } j = k-1 \\
&= \alpha\, e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{\sqrt{j!}} |j\rangle \\
&= \alpha\, |\alpha\rangle
\end{aligned}$$

où on a commencé la somme à 0, car le terme avec $j = -1$ est nul. Ainsi, puisque $|\alpha\rangle$ est bien un vecteur propre de $\hat{a}$, notre définition est valable.

b)
La valeur moyenne de $\hat{N}$ dans les états $|\alpha\rangle$ est définie comme

$$\begin{aligned}
\langle \hat{N} \rangle &= \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle \\
&= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle \\
&= \langle \alpha | \alpha^* \, \alpha | \alpha \rangle \\
&= |\alpha|^2 \langle \alpha | \alpha \rangle \\
&= |\alpha|^2
\end{aligned}$$

car $|\alpha\rangle$ est normalisé. En effet,

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\alpha\rangle &= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k(\alpha^*)^j}{\sqrt{k!j!}} \langle j|k\rangle \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k(\alpha^*)^j}{\sqrt{k!j!}} \delta jk \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha!^{2k}}{k!} \\
&= e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$