

Mécanique quantique I

Séance d'exercices 4 : oscillateur harmonique, opérateurs d'échelles et champs électromagnétique quantifié

1. Pour résoudre le problème de l'oscillateur harmonique à une dimension de manière algébrique, on introduit les opérateurs linéaires suivants (dans les unités naturelles) :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \text{ et } \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

où \hat{x} et \hat{p} sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement.

- \hat{a} et \hat{N} sont-ils hermitiens ? Calculer le commutateur $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$. En déduire les commutateurs $[\hat{N}, \hat{a}]$ et $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger]$.
 - Réécrire, en unité naturelle, le hamiltonien de l'oscillateur harmonique en fonction de ces opérateurs.
 - Soit $|\lambda\rangle$ un état propre normalisé de \hat{N} de valeur propre λ . Montrer que $\lambda \geq 0$.
 - En utilisant les résultats (a) et (c), déduire que les états $\hat{a}|\lambda\rangle$ et $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$ sont aussi états propres de \hat{N} .
 - Calculer $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ et $\hat{a}|n\rangle$.
 - Finalement montrer que $\lambda \in \mathbf{N}$ et en déduire la quantification de l'énergie.
 - Trouver la représentation matricielle de $\hat{a}^\dagger, \hat{a}, \hat{N}$ et \hat{H} dans la base $|n\rangle$.
2. La quantification des équations de Maxwell associées à une onde électromagnétique dans une cavité fait apparaître un hamiltonien qui correspond à une somme d'oscillateurs harmoniques, où un oscillateur est associé à chaque mode du champs. Si on ne considère qu'un seul mode, le hamiltonien se résume à :

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

où $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ est l'opérateur *nombre de photons*, \hat{a}^\dagger l'opérateur de *création d'un photon* et \hat{a} l'opérateur de *annihilation d'un photon*. Parmi les états quantiques possibles du champ électromagnétique on peut considérer les *états cohérents* $|\alpha\rangle$ qui sont définis par

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

(a) Montrer que

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle,$$

où $|0\rangle$ est le *vide* c'est à dire l'état à zéro photon.

(b) Calculer la valeur moyenne de \hat{N} dans l'état $|\alpha\rangle$.