Mécanique quantique I

Séance d'exercices 4 : oscillateur harmonique, opérateurs d'échelles et champs électromagnétique quantifié

1. Pour résoudre le problème de l'oscillateur harmonique à une dimension de manière algébrique, on introduit les opérateurs linéaires suivants (dans les unités naturelles) :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\,\hat{p}) \text{ et } \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

   où $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont respectivement les opérateurs position et quantité de mouvement.

   (a) $\hat{a}$ et $\hat{N}$ sont-ils hermitiens ? Calculer le commutateur $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$. En déduire les commutateurs $[\hat{N}, \hat{a}]$ et $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger]$.

   (b) Réécrire, en unité naturelle, le hamiltonien de l'oscillateur harmonique en fonction de ces opérateurs.

   (c) Soit $|\lambda\rangle$ un état propre normalisé de $\hat{N}$ de valeur propre λ. Montrer que $\lambda \geq 0$.

   (d) En utilisant les résultats (a) et (c), déduire que les états $\hat{a}|\lambda\rangle$ et $\hat{a}^\dagger|\lambda\rangle$ sont aussi états propres de $\hat{N}$.

   (e) Calculer $\hat{a}^\dagger\,|n\rangle$ et $\hat{a}\,|n\rangle$.

   (f) Finalement montrer que $\lambda \in \mathbf{N}$ et en déduire la quantification de l'énergie.

   (g) Trouver la représentation matricielle de $\hat{a}^\dagger, \hat{a}, \hat{N}$ et $\hat{H}$ dans la base $|n\rangle$.

2. La quantification des équations de Maxwell associées à une onde électromagnétique dans une cavité fait apparaître un hamiltonien qui correspond à une somme d'oscillateurs harmoniques, où un oscilateur est associé à chaque mode du champs. Si on ne considère qu'un seul mode, le hamiltonien se résume à :

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$$

   où $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ est l'opérateur *nombre de photons*, $\hat{a}^\dagger$ *l'opérateur de création d'un photon* et $\hat{a}$ *l'opérateur d'annihilation d'un photon.* Parmi les états quantiques possibles du champs électromagnétique on peut considérer les *états cohérents* $|\alpha\rangle$ qui sont définis par

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

   (a) Montrer que

$$|\alpha\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle\,,$$

   où $|0\rangle$ est le *vide* c'est à dire l'état à zéro photon.

   (b) Calculer la valeur moyenne de $\hat{N}$ dans l'état $|\alpha\rangle$.

---

http ://quic.ulb.ac.be :
Evgueni.Karpov@ulb.ac.be, ahertz@ulb.ac.be.