Mécanique quantique I

Séance d'exercices 5 : particule chargée dans un champ magnétique uniforme.

On rappelle que le hamiltonien d'une particule de charge q et de masse m placée dans un champs magnétique $\mathbf{B}(x,y,z) = \nabla \times \mathbf{A}(x,y,z)$ est donné par

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m}.$$

1. Exprimer en toute généralité le commutateur $[\mathbf{p}, \mathbf{A}]$ en se plaçant dans la représentation position. En déduire un choix de jauge pour $\mathbf{A}$ qui permet de simplifier le hamiltonien précédent.
2. Soit le potentiel vecteur $\mathbf{A}(x,y,z) = Bx\mathbf{1}_y$. Vérifier que ce potentiel correspond à un champ magnétique uniforme et qu'il satisfait au choix de jauge évoqué à la question 1. En déduire l'expression du hamiltonien en fonction de B.
3. Parmi les opérateurs p_x, p_y et p_z, quels sont ceux qui commutent avec H ? Proposer un ECOC du systeme.
4. Montrer que le choix de fonction d'onde $\psi(x,y,z) = \phi(x)\, e^{ik_y y}\, e^{ik_z z}$ permet de séparer les variables x, y et z dans l'équation de Schrödinger et d'en déduire l'équation différentielle pour la variable x. Expliquer pourquoi on fait un tel choix de fonction d'onde.
5. Résoudre cette équation d'après sa forme particulière et en déduire le spectre (énergies, dégénérescences) et les fonctions d'onde (non normalisées) du problème de départ.
6. Soit une feuille métallique rectangulaire mince de dimensions $l_x \times l_y$ plongée dans un champ magnétique uniforme orienté suivant z. Estimer le degré de dégénérescence des niveaux d'énergie les plus bas.
   Application numérique : un échantillon mince de germanium plongé dans un champ magnétique réglable est soumis à un rayonnement laser de 337 μm. On observe une raie d'absorption pour un champ de 2.605(5) T. Interpréter ce résultat et en déduire une caractéristique importante du germanium. Pour un échantillon de 1 cm de côté, estimer la dégénérescence des niveaux dans un tel champ magnétique.
   (*données* : $h = 6{,}626.10^{-34}$J.s. Pour l'électron $e = 1{,}602.10^{-19}$C et $m_e = 9{,}109.10^{-31}$kg).
7. Comment les résultats précédents seraient-ils modifiés dans la jauge de Coulomb alternative $\mathbf{A}(x,y,z) = -By\mathbf{1}_x$? Montrer que ces deux jauges diffèrent par le gradient d'une fonction $f(x,y)$. Montrer que les éléments de matrice de l'observable de quantité de mouvement (et donc du hamiltonien) sont indépendants de jauge (on les qualifie de "grandeurs physiques véritables"), pour autant que les fonctions d'onde subissent un changement de phase local. Expliciter ce changement de phase.

---

http ://quic.ulb.ac.be :
Evgueni.Karpov@ulb.ac.be, ahertz@ulb.ac.be.