Mécanique quantique I

Séance d'exercices 5 : évolution temporelle.

1. Soit l'opérateur
$$\hat{A}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}(t')\, dt'.$$
Démontrer que si l'hamiltonien $\hat{H}$ commute avec lui-même à différents temps, alors $\hat{A}$ commute avec sa dérivée temporelle.

2. Soit $\hat{P}$ un projecteur
   (a) Calculer $e^{ix\hat{P}}$ où x est un nombre réel. Cet opérateur est-il unitaire ?
   (b) On considère un système physique à deux états. L'hamiltonien du système peut être diagonalisé dans la base des états notés $|0\rangle$ et $|1\rangle$, et il s'écrit :
$$\hat{H} = \hbar\omega|1\rangle\langle 1|$$
   où $|1\rangle\langle 1|$ est un projecteur. Déduire l'évolution temporelle du système dans cette base, sachant que l'état initial du système est $|\psi(0)\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$

3. En utilisant le théorème d'Ehrenfest, exprimer l'évolution temporelle des valeurs moyennes des opérateurs position et quantité de mouvement pour un état général de l'oscillateur harmonique en une dimension.

4. Effet Zéno
Soit l'hamiltonien d'un système à deux niveaux
$$H = \begin{pmatrix} 1 & X \\ X & 1 \end{pmatrix}$$
où X représente le couplage entre les deux niveaux du système.
   (a) Trouver l'évolution temporelle de l'état initial $|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ après un temps t.
   (b) Trouver la probabilité que le système se trouve dans l'état $|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ après un temps $t = \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{X}$, c'est-à-dire calculer $P(|\psi(t)\rangle = |\psi_2\rangle)$.
   (c) Quelle est la probabilité que le système se trouve dans l'état initial après un temps $\tau = \frac{t}{N},\ N \gg 1$?
   (d) Supposons maintenant qu'après l'évolution pendant un temps τ on mesure le système en le projetant sur l'état initial et on répète la même procédure, conditionnellement au fait que le système se trouve à nouveau dans l'état initial. C'est-à-dire qu'on laisse le système évoluer pendant un temps τ, puis on mesure. Et on répète cette procédure N fois. Dans la limite $N \to \infty, \tau \to 0$ et $t = N\tau =$ *constante*, quelle est alors la probabilité que le système se trouve dans l'état initial après un temps t ? Interprétez ce résultat.

http ://quic.ulb.ac.be, ahertz@ulb.ac.be.

5. La densité de probabilité de présence d'une particule au point $\mathbf{r}$ est donnée par l'expression $\rho(\mathbf{r},t) = \psi^*(\mathbf{r},t)\,\psi(\mathbf{r},t)$

   (a) En déduire l'évolution temporelle de $\rho(\mathbf{r},t)$

   $$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\Big(\psi^*(\mathbf{r},t)\,\Delta\psi(\mathbf{r},t) - \psi(\mathbf{r},t)\,\Delta\psi^*(\mathbf{r},t)\Big) \tag{1}$$

   (b) En mécanique des fluides et en électromagnétisme, on associe la notion de densité (de masse ou de charge électrique) à celle du *vecteur densité de courant*, ces deux grandeurs satisfaisant l'équation de conservation suivante :

   $$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = 0.$$

   Réécrire l'equation (1) comme une équation de conservation, en introduisant le vecteur *courant de probabilité* $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ (Rappel : $\nabla\cdot\nabla\, f = \Delta\, f$)

   (c) Réécrire le vecteur courant de probabilité en fonction de l'opérateur impulsion en représentation position. Donner une interprétation.