Mechanique Quantique I - Séance 5
Oscillateur harmonique et opérateurs d'echelles

Exercice 1
Oscillateur harmonique 1D, de manière algébrique

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \qquad \hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$$

$\hat{a}, \hat{N}$ opérateurs lineaires

a) i) $\hat{a}, \hat{N}$ hermitiens ?

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}) \neq \hat{a} \quad \longrightarrow \text{ pas Hermitien}$$

$$\hat{N} = (\hat{a}^+\hat{a})^+ = \hat{a}^+ (\hat{a}^+)^+ = \hat{a}^+\hat{a} = \hat{N} \quad \longrightarrow \text{ Hermitien}$$

ii) $[\hat{a}, \hat{a}^+] = ?$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \frac{1}{2}[\hat{x} + i\hat{p}, \hat{x} - i\hat{p}] = \frac{1}{2}\left(\cancelto{0}{[\hat{x}, \hat{x}]} - i[\hat{x}, \hat{p}] + i[\hat{p}, \hat{x}] + \cancelto{0}{[\hat{p}, \hat{p}]}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(-2i^2) = -i^2 = 1$$

iii) $[\hat{N}, \hat{a}] = ?$, $[\hat{N}, \hat{a}^+] = ?$

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^+\hat{a}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^+\hat{a} = (\hat{a}^+\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^+)\hat{a}$$
$$= [\hat{a}^+, \hat{a}]\hat{a} = -[\hat{a}, \hat{a}^+]\hat{a} = -1 \cdot \hat{a} = -\hat{a}$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a} = a^+(\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}) = a^+[\hat{a}, \hat{a}^+] = a^+$$

b) $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \underset{\text{naturelles}}{\overset{\text{en unites}}{=}} \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \hat{x}^2)$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{1}{4}(\hat{x} + i\hat{p})(\hat{x} - i\hat{p}) + \frac{1}{4}(\hat{x} - i\hat{p})(\hat{x} + i\hat{p})$$
$$= \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}) = \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a})$$
$$= \frac{1}{2}([\hat{a}, \hat{a}^+] + 2\hat{a}^+\hat{a}) = \frac{1}{2}(1 + 2\hat{N}) = \frac{1}{2} + \hat{N}$$

c) $\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$. Montrer que $\lambda \geq 0$ ②

$|\lambda\rangle$ normalisée $\Rightarrow \langle\lambda|\lambda\rangle = 1$

$\langle\lambda|\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda\langle\lambda|\lambda\rangle \Rightarrow$
$\langle\lambda|\hat{a}^+\hat{a}|\lambda\rangle = \lambda \cdot 1$

Mais : $\langle\lambda|\hat{a}^+$ est le bra associé au $\hat{a}|\lambda\rangle$

Si $\hat{a}|\lambda\rangle = |\varphi\rangle$, $\langle\lambda|\hat{a}^+ = \langle\varphi|$

Donc $\langle\lambda|\hat{a}^+\hat{a}|\lambda\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle = \| |\varphi\rangle\|^2 \geq 0$

d) déduire que les états $\hat{a}|\lambda\rangle$ et $\hat{a}^+|\lambda\rangle$ sont aussi états propre de $\hat{N}$

$\Rightarrow$ montre que $\hat{N}\hat{a}|\lambda\rangle = k_1\hat{a}|\lambda\rangle$, $\hat{N}\hat{a}^+|\lambda\rangle = k_2|\lambda\rangle$, $k_{1,2} \in \mathbb{C}$

$\hat{N}\hat{a}|\lambda\rangle = ([\hat{N},\hat{a}] + \hat{a}\hat{N})|\lambda\rangle$
$= (-\hat{a} + \hat{a}\hat{N})|\lambda\rangle = \hat{a}(-1+\hat{N})|\lambda\rangle$
$= \hat{a}(-1+\lambda)|\lambda\rangle = (\lambda-1)\hat{a}|\lambda\rangle$

$\Rightarrow k_1 = \lambda - 1$

$\hat{N}\hat{a}^+|\lambda\rangle = ([\hat{N},\hat{a}^+] + \hat{a}^+\hat{N})|\lambda\rangle = (\hat{a}^+ + \hat{a}^+N)|\lambda\rangle$
$= \hat{a}^+(1+\lambda)|\lambda\rangle \Rightarrow$
$k_2 = \lambda + 1$

e) Montrer que $\lambda \in \mathbb{N}$ et en déduire la quantification d'énergie

états

$\hat{a}|\lambda\rangle \rightsquigarrow (\lambda-1)$ valeur propre
$\hat{a}^2|\lambda\rangle \rightsquigarrow (\lambda-2)$ — " —

$\hat{a}^n|\lambda\rangle \rightsquigarrow (\lambda-n)$ — " —

Si $\lambda \notin \mathbb{N}$, $\exists n : (\lambda-n) < 0$
mais en c) on a montré que la valeur propre ≥ 0 $\Bigg) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{N}$

$\hat{H}|\lambda\rangle = (N+\frac{1}{2})|\lambda\rangle = (\lambda+\frac{1}{2})|\lambda\rangle$, $\lambda \in \mathbb{N}$

La quantification

M. Q. I - Séance 5

A la séance 4, ex. 6 on a trouvé :
$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$
$\hat{N}\hat{a}^+|n\rangle = (n+1)\hat{a}^+|n\rangle$
n entier
$[\hat{a},\hat{a}^+] = 1$, $[\hat{N},\hat{a}] = -\hat{a}$
$[\hat{N},\hat{a}^+] = 1$

Exercice 1

f) caclculer $\hat{a}^+|n\rangle$ et $\hat{a}|n\rangle$

On applique $\hat{N}$ à un ket

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$$

ou $\hat{N}|\varphi\rangle = (n-1)|\varphi\rangle$

Donc $|\varphi\rangle$ est un vecteur propre de $\hat{N}$ pour le valeur propre $(n-1)$
On sait que $\hat{N}|n-1\rangle = (n-1)|n-1\rangle$ $\Rightarrow$

Le valeur propre $(n-1)$ est pour les deux kets $|n-1\rangle$, $|\varphi\rangle$;

$\Rightarrow$ Les deux kets doivent être proportionnels

$$|\varphi\rangle = \hat{a}|n\rangle = x|n-1\rangle \quad , x \in \mathbb{R}$$

La norme du $|\varphi\rangle$ est :

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \langle n|\underbrace{\hat{a}^+\hat{a}}_{N}|n\rangle = \langle n|n|n\rangle = n\cancel{\langle n|n\rangle}^{1} = n$$

mais aussi $\langle\varphi|\varphi\rangle = x^2\langle n-1|n-1\rangle = x^2$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad |\varphi\rangle = \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

La même raisonement : $|\varphi'\rangle = \hat{a}^+|n\rangle$

$\hat{N}\hat{a}^+|n\rangle = (n+1)\hat{a}^+|n\rangle$, $\hat{N}|n+1\rangle = (n+1)|n+1\rangle$

Donc $\underline{\{|\varphi'\rangle = \hat{a}^+|n\rangle = x'|n+1\rangle , x' \in \mathbb{R}}$

La norme de $|\varphi'\rangle$: $\langle\varphi'|\varphi'\rangle = \langle n|\hat{a}\hat{a}^+|n\rangle$
$[\hat{a},\hat{a}^+] = 1 \Rightarrow \hat{a}\hat{a}^+ = 1 + \hat{a}^+\hat{a}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle\varphi'|\varphi'\rangle = \langle n|1 + \hat{a}^+\hat{a}|n\rangle =$$
$$= \langle n|1|n\rangle + \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle$$
$$= \langle n|n\rangle + \langle n|N|n\rangle$$
$$= 1 + n$$

$\langle\varphi'|\varphi'\rangle = x'^2\langle n+1|n+1\rangle = x'^2$

Donc $x' = \sqrt{1+n}$

Alors $\underline{\{|\varphi'\rangle = \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{1+n}\,|n+1\rangle\}}$

Ex. 1

g) Représentation matricielle de $\hat{a}^+$, $\hat{a}$, N, $\hat{H}$

La base $|n\rangle$ est defini comme :

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{etc}$$

Donc $|n\rangle = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}\right\} n \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$

On sait que $N|n\rangle = n|n\rangle$

Donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & & 2 & & 0 & \\ 0 & & & 3 & & \\ \vdots & 0 & & & \ddots & \end{pmatrix}$, $N_{ij} = \delta_{ij}(j-1)$

Pour $\hat{a}$, $\hat{a}^+$

$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & \vdots & \cdots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}\right\} n \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{n} \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}\right\} n-1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + \ldots + a_{1n}\cdot 1 + a_{1(n+1)}\cdot 0 + \ldots = 0$
$\quad a_{n1}\cdot 0 + a_{n2}\cdot 0 + \ldots a_{nn}\cdot 0 + a_{n(n+1)}\cdot 1 + 0\ldots = \sqrt{n}$

Donc $a_{n(n+1)} = \sqrt{n}$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & & 0 & \sqrt{2} & \\ \vdots & & & & \sqrt{3} \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Pour le $\hat{a}^+$, on sait que $\hat{a}^+ = (\hat{a}^*)^T$

Donc $$\hat{a}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & 1 & 0 & \\ & & \sqrt{2} & 0 \\ \vdots & & & \sqrt{3} & \ddots \end{pmatrix}$$

M.Q. II - Séance 5

Ex. 1 g)

$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$ Donc $\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & 3/2 & & \\ & & 5/2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

Exercice 2

$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$ Onde EM dans un cavité

ou $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$ est l'opérateur de nombre de photons

$\hat{a}, \hat{a}^+$ opérateurs de création et annihilation d'un photon

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad , \alpha \in \mathbb{C}$$

a) Montrer que $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^+} |0\rangle$

On a la série exponentielle $e^{\alpha\hat{a}^+} = \sum_{k=0} \frac{(\alpha\hat{a}^+)^k}{k!}$

Alors $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^+} |0\rangle$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^+)^k}{k!} |0\rangle$$

On sait que $\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ $\quad \left\{ \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \right.$

$\Rightarrow (\hat{a}^+)^k|0\rangle = \sqrt{k!}\,|k-1\rangle$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \sqrt{k!}\,|k\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle$$

Alors $\hat{a}|\alpha\rangle = \hat{a}\, e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \hat{a}|k\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \sqrt{k}\,|k-1\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{(k-1)!}} |k-1\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha \sum_{k'=0} \frac{\alpha^{k-1}}{\sqrt{(k')!}} |k'\rangle$$

$$\Rightarrow |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k'}}{\sqrt{k'!}} |k'\rangle$$

Donc la relation $\hat{a}|k\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ est vérifiée

Valeur moyenne de $\hat{N}$ dans l'état $|\alpha\rangle$

$$\langle \hat{N} \rangle_\alpha = \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} \langle \hat{N} \rangle_\alpha = \langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a} | \alpha \rangle \\ \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\langle \hat{N} \rangle_\alpha = \langle \alpha | \alpha^* \alpha | \alpha \rangle$$

$$= |\alpha|^2 \langle \alpha | \alpha \rangle$$

$$= |\alpha|^2$$