

## Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°6 : Moment cinétique et spin 1/2

1. À partir des relations de commutation qui le définissent, montrer que tout moment cinétique satisfait la propriété étonnante suivante

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L}.$$

2. Calculez le commutateur  $[S^2, S_i]$  où  $i = x, y, z$ . Que pouvez-vous en conclure ?
3. On considère l'observable  $\mathbf{S}$  associée à un moment cinétique  $s = 1/2$  (spin). Dans ce cas précis,  $S^2$  et  $S_z$  forment un ECOOC. On définit leurs valeurs propres et états propres ainsi :

$$\begin{aligned} S^2 |s, m\rangle &= \hbar^2 s(s+1) |s, m\rangle, \quad -s \leq m \leq s, \\ S_z |s, m\rangle &= \hbar m |s, m\rangle. \end{aligned}$$

On peut également définir les opérateurs échelle du spin  $S_+$  et  $S_-$  qui ont pour action

$$S_{\pm} |s, m\rangle = \hbar \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)} |s, m \pm 1\rangle.$$

- (a) Écrire la représentation matricielle de  $S^2$  et  $S_z$ .
- (b) Écrire la représentation matricielle des opérateurs échelle  $S_+$  et  $S_-$ . En déduire la représentation matricielle de l'observable  $S$  en utilisant les relations suivantes :

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} \quad S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

4. On note  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  la base des états propres communs des opérateurs  $S^2$  et  $S_z$ .
  - (a) Rechercher les états propres communs à  $S^2$  et à  $S_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}$  où  $\mathbf{u}$  est un vecteur unité d'orientation arbitraire  $(\theta, \varphi)$ .
  - (b) Appelons ces vecteurs  $|+\rangle_u$  et  $|-\rangle_u$  et supposons que l'on ait préparé l'état  $|+\rangle_u$ . Analyser les mesures (résultats et probabilités) de
    - i.  $S_z$ ,
    - ii.  $S_x$ ,
    - iii.  $S_z$  puis  $S_x$ .
5. Précession de Larmor : l'hamiltonien d'une particule de spin 1/2 dans un champ magnétique d'amplitude  $B$  uniforme orienté suivant l'axe  $z$  est donné par

$$H = \gamma \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

où  $\gamma$  est le rapport gyromagnétique.

- (a) Déterminer les valeurs propres et états propres correspondants.
- (b) Donner l'évolution temporelle de l'état d'une telle particule initialement dans l'état  $|+\rangle_u$  et interpréter physiquement (l'état  $|+\rangle_u$  est un état propre commun à  $S^2$  et à  $H$  qui correspond à la valeur propre positive).