Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°6 : Moment cinétique et spin 1/2

1. À partir des relations de commutation qui le définissent, montrer que tout moment cinétique satisfait la propriété étonnante suivante

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L}.$$

2. Calculez le commutateur $[S^2, S_i]$ où $i = x, y, z$. Que pouvez-vous en conclure ?

3. On considère l'observable $\mathbf{S}$ associée à un moment cinétique $s = 1/2$ (spin). Dans ce cas précis, S^2 et S_z forment un ECOC. On définit leurs valeurs propres et états propres ainsi :

$$\begin{aligned} S^2 \left|s, m\right\rangle &= \hbar^2 \, s(s+1) \left|s, m\right\rangle, \quad -s \leq m \leq s, \\ S_z \left|s, m\right\rangle &= \hbar \, m \left|s, m\right\rangle. \end{aligned}$$

On peut également définir les opérateurs échelle du spin S_+ et S_- qui ont pour action

$$S_\pm \left|s, m\right\rangle = \hbar\sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)} \left|s, m \pm 1\right\rangle.$$

   (a) Écrire la représentation matricielle de S^2 et S_z.

   (b) Écrire la représentation matricielle des opérateurs échelle S_+ et S_-. En déduire la représentation matricielle de l'observable S en utilisant les relations suivantes :

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} \qquad\qquad S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

4. On note $\{\left|\uparrow\right\rangle, \left|\downarrow\right\rangle\}$ la base des états propres communs des opérateurs S^2 et S_z.

   (a) Rechercher les états propres communs à S^2 et à $S_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}$ où $\mathbf{u}$ est un vecteur unité d'orientation arbitraire (θ, φ).

   (b) Appelons ces vecteurs $\left|+\right\rangle_u$ et $\left|-\right\rangle_u$ et supposons que l'on ait préparé l'état $\left|+\right\rangle_u$. Analyser les mesures (résultats et probabilités) de

      i. S_z,

      ii. S_x,

      iii. S_z puis S_x.

5. Précession de Larmor : l'hamiltonien d'une particule de spin 1/2 dans un champ magnétique d'amplitude B uniforme orienté suivant l'axe z est donné par

$$H = \gamma \, \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

où γ est le rapport gyromagnétique.

   (a) Déterminer les valeurs propres et états propres correspondants.

   (b) Donner l'évolution temporelle de l'état d'une telle particule initialement dans l'état $\left|+\right\rangle_u$.

---

http ://quic.ulb.ac.be, zvherstr@ulb.ac.be