Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°7 : Evolution temporelle

1. Soit l'opérateur
$$\hat{A}(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \hat{H}(t')\,dt'.$$
Démontrer que si le hamiltonien $\hat{H}$ commute avec lui-même à différents temps, alors $\hat{A}$ commute avec sa dérivée temporelle.

2. Soit $\hat{P}$ un projecteur
   (a) Calculer $e^{ix\hat{P}}$ où x est un nombre réel. Cet opérateur est-il unitaire ?
   (b) On considère un système physique à deux états. L'hamiltonien du système peut être diagonalisé dans la base des états notés $|0\rangle$ et $|1\rangle$, et il s'écrit :
   $$\hat{H} = \hbar\omega|1\rangle\langle 1|$$
   où $|1\rangle\langle 1|$ est un projecteur. Déduire l'évolotion temporelle du système dans cette base, sachant que l'état initial du système est $|\psi(0)\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{(2)}}$

3. La densité de probabilité de présence d'une particule au point $\mathbf{r}$ est donnée par l'expression $\rho(\mathbf{r},t) = \psi^*(\mathbf{r},t)\,\psi(\mathbf{r},t)$
   (a) En déduire l'évolution temporelle de $\rho(\mathbf{r},t)$
   $$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\Big(\psi^*(\mathbf{r},t)\,\Delta\psi(\mathbf{r},t) - \psi(\mathbf{r},t)\,\Delta\psi^*(\mathbf{r},t)\Big) \qquad (1)$$
   (b) En mécanique des fluides et en électromagnétisme, on associe la notion de densité (de masse ou de charge électrique) à celle du *vecteur densité de courant*, ces deux grandeurs satisfaisant l'équation de conservation suivante :
   $$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = 0.$$
   Réécrire l'equation (1) comme une équation de conservation, en introduisant le vecteur *courant de probabilité* $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ (Rappel : $\nabla\cdot\nabla f = \Delta f$)
   (c) Réécrire le vecteur courant de probabilité en fonction de l'opérateur impulsion en représentation position. Donner une interprétation.

http ://quic.ulb.ac.be :
Evgueni.Karpov@ulb.ac.be, Christina.Giarmatzi@ulb.ac.be