# Mécanique quantique I

## Séance d'exercices n°7 : Moment cinétique et spin 1/2

1. À partir des relations de commutation qui le définissent, montrer que tout moment cinétique satisfait la propriété étonnante suivante

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar\, \mathbf{L}.$$

2. On considére l'observable $\mathbf{S}$ associée à un moment cinétique $s = 1/2$ (spin). On note $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ la base à deux dimensions des états propres communs des opérateurs $\mathbf{S^2}$ et $S_z$. Dans cette base :
   (a) écrire la représentation matricielle de $\mathbf{S}^2$ et $S_z$ :
   $\mathbf{S}^2 \,|s,m\rangle = \hbar^2\, s(s+1)\,|s,m\rangle$, $-s \leq m \leq s$,
   $\mathbf{S}_z \,|s,m\rangle = \hbar\, m\,|s,m\rangle$.
   (b) écrire la représentation matricielle des opérateurs échelle $S_+$ et $S_-$ donnés par $S_\pm \,|s,m\rangle = \hbar\sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)}\,|s, m \pm 1\rangle$. En déduire la représentation matricielle de l'observable $\mathbf{S}$.
3. Spin d'orientation quelconque.
   (a) Rechercher les états propres communs à $\mathbf{S^2}$ et à $S_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}$ où $\mathbf{u}$ est un vecteur unité d'orientation arbitraire $(\theta, \varphi)$.
   (b) Appelons ces vecteurs $|\uparrow\rangle_u$ et $|\downarrow\rangle_u$ et supposons que l'on ait préparé l'état $|\uparrow\rangle_u$. Analyser les mesures (résultats et probabilités) de
      i. $S_z$,
      ii. $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$,
      iii. $S_z$ puis $S_x$.
4. Précession de Larmor : l'hamiltonien d'une particule de spin 1/2 dans un champ magnétique d'amplitude $B$ uniforme orienté suivant l'axe $z$ est donné par

$$H = \gamma\, \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

   où $\gamma$ est le rapport gyromagnétique.
   (a) Déterminer les valeurs propres et états propres correspondants.
   (b) Donner l'évolution temporelle de l'état d'une telle particule initialement dans l'état $|\uparrow\rangle_u$ et interpréter physiquement (l'état $|\uparrow\rangle_u$ est un état propre commun à $\mathbf{S}^2$ et à $H$ qui correspond à la valeur propre positive).

http ://quic.ulb.ac.be
Evgueni.Karpov@ulb.ac.be, ahertz@ulb.ac.be