

Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°7: Composition de moments cinétiques

1. Addition de deux moments cinétiques.

Soit $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 \equiv \mathbf{J}_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \mathbf{J}_2$.

Montrer que $\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\hbar \mathbf{J}$ et $\{\mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2\}$ forment un ECOOC .

2. Relations triangulaires.

(a) Donner les résultats des compositions $j_1 \oplus j_2$ suivantes

i. $1 \oplus 1$

ii. $3/2 \oplus 5$

iii. $3/2 \oplus 5/2$

iv. $0 \oplus 4$

v. $5/2 \oplus 5/2$

(b) Les relations triangulaires j_1, j_2, j suivantes sont-elles satisfaites?

i. 3, 5, 1

ii. 0, 4, 4

iii. $3/2, 3/2, 3/2$

iv. $5/2, 2, 1/2$

v. 3, $3/2, 1/2$

(c) Résoudre

i. $7/2 \oplus 3/2 = j$

ii. $j \oplus 3 = 2$

iii. $7/2 \oplus j = 1$

iv. $j \oplus 0 = 5/2$

v. $6 \oplus j = 0$

3. Composition d'un moment cinétique orbital l et d'un spin $1/2$.

(a) Soit $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ où les opérateurs vectoriels \mathbf{L} et \mathbf{S} sont respectivement un moment cinétique orbital et un spin. Rechercher les états propres de l'observable \mathbf{J}^2 ("diagonaliser" \mathbf{J}^2 à partir de sa représentation dans la base des états $|l m_l\rangle \otimes |s m_s\rangle = |l m_l s m_s\rangle$ avec $s = 1/2$).

(b) Établir les formules des coefficients de Clebsch-Gordan ($l m_l 1/2 m_s |jm\rangle$).