

## Mécanique Quantique 1 — CORRIGÉ

Séance d'exercices 7 : Composition de moments cinétique

## Exercice 1

Calculons d'abord les relations de commutations des moments cinétiques :

$$[J_x, J_y] = [J_{x_1} + J_{x_2}, J_{y_1} + J_{y_2}] = [J_{x_1}, J_{y_1}] + [J_{x_2}, J_{y_2}] = i\hbar J_{z_1} + i\hbar J_{z_2} = i\hbar J_z$$

où on a utilisé le fait que toutes les composantes de  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  commutent entre elles puisqu'elles n'appartiennent pas au même espace.

De la même façon,

$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

On peut maintenant calculer le produit vectoriel de  $\mathbf{J}$  avec lui-même :

$$\mathbf{J} \times \mathbf{J} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ J_x & J_y & J_z \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix} = \hat{i}[J_y, J_z] - \hat{j}[J_x, J_z] + \hat{k}[J_x, J_y] = \hat{i}i\hbar J_x - \hat{j}(-i\hbar J_y) + \hat{k}i\hbar J_z = i\hbar \mathbf{J}$$

Pour montrer ensuite que  $\{J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$  forment un ECOC, il faut montrer que tous ces opérateurs commutent entre eux.

Il est trivial que  $J_1^2$  et  $J_2^2$  commutent puisqu'ils n'appartiennent pas au même sous-espace. Il faut cependant vérifier les autres relations. Pour calculer, on utilise le fait que

$$J^2 = J_1^2 + 2\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + J_2^2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} [J^2, J_1^2] &= [J_1^2 + 2J_1 J_2 + J_2^2, J_1^2] \\ &= [J_1^2, J_1^2] + 2[J_1 J_2, J_1^2] + [J_2^2, J_1^2] \\ &= 0 + 2J_1[J_2, J_1^2] + 2[J_1, J_1^2]J_2 + 0 \\ &= 0 \\ [J^2, J_2^2] &= [J_1^2 + 2J_1 J_2 + J_2^2, J_2^2] \\ &= [J_1^2, J_2^2] + 2[J_1 J_2, J_2^2] + [J_2^2, J_2^2] \\ &= 0 + 2J_1[J_2, J_2^2] + 2[J_1, J_2^2]J_2 + 0 \\ &= 0 \\ [J_1^2, J_z] &= [J_{x_1}^2 + J_{y_1}^2 + J_{z_1}^2, J_{z_1} + J_{z_2}] \\ &= [J_{x_1}^2 + J_{y_1}^2 + J_{z_1}^2, J_{z_1}] + [J_{x_1}^2 + J_{y_1}^2 + J_{z_1}^2, J_{z_2}] \\ &= J_{x_1}[J_{x_1}, J_{z_1}] + [J_{x_1}, J_{z_1}]J_{x_1} + J_{y_1}[J_{y_1}, J_{z_1}] + [J_{y_1}, J_{z_1}]J_{y_1} + [J_{z_1}^2, J_{z_1}] + 0 \\ &= i\hbar(-J_{x_1}J_{y_1} - J_{y_1}J_{x_1} + J_{x_1}J_{y_1} + J_{y_1}J_{x_1}) \\ &= 0 \\ [J_2^2, J_z] &= [J_{x_2}^2 + J_{y_2}^2 + J_{z_2}^2, J_{z_1} + J_{z_2}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

et, en utilisant les résultats ci-dessus

$$\begin{aligned}
[J^2, J_z] &= [J_1^2 + 2J_1J_2 + J_2^2, J_z] \\
&= [J_1^2, J_z] + 2[J_1J_2, J_z] + [J_2^2, J_z] \\
&= 0 + 2[J_{x_1}J_{x_2} + J_{y_1}J_{y_2} + J_{z_1}J_{z_2}, J_{z_1} + J_{z_2}] \\
&= 2 \left( J_{x_1}[J_{x_2}, J_{z_1}] + [J_{x_1}, J_{z_1}]J_{x_2} + J_{x_1}[J_{x_2}, J_{z_2}] + [J_{x_1}, J_{z_2}]J_{x_2} \right. \\
&\quad \left. + J_{y_1}[J_{y_2}, J_{z_1}] + [J_{y_1}, J_{z_1}]J_{y_2} + J_{y_1}[J_{y_2}, J_{z_2}] + [J_{y_1}, J_{z_2}]J_{y_2} \right) \\
&= 2 \left( 0 - i\hbar J_{y_1}J_{x_2} - i\hbar J_{x_1}J_{y_2} + 0 + 0 + i\hbar J_{x_1}J_{y_2} + i\hbar J_{y_1}J_{x_2} + 0 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, tous les opérateurs commutent entre eux et ils forment bien un ECOG.

## Exercice 2

(a) Pour donner les résultats possible, il suffit d'utiliser l'inégalité

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

et de se rappeler que  $j_1 + j_2 + j$  doit être entier. Ainsi,

- i.  $J = 1 \oplus 1 \Rightarrow 0 \leq J \leq 2 \Rightarrow J \in \{0, 1, 2\}$ .
- ii.  $J = 3/2 \oplus 5 \Rightarrow 7/2 \leq J \leq 13/2 \Rightarrow J \in \{7/2, 9/2, 11/2, 13/2\}$ .
- iii.  $J = 3/2 \oplus 5/2 \Rightarrow 1 \leq J \leq 4 \Rightarrow J \in \{1, 2, 3, 4\}$ .
- iv.  $J = 0 \oplus 4 \Rightarrow 4 \leq J \leq 4 \Rightarrow J = 4$ .
- v.  $J = 5/2 \oplus 5/2 \Rightarrow 0 \leq J \leq 5 \Rightarrow J \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

(b) Pour vérifier les relations triangulaires, on utilise la mêmes inégalité

- i.  $j_1 = 3, j_2 = 5 \Rightarrow 2 \leq j \leq 8$ . Or  $j = 1 < 2 \Rightarrow$  NON.
- ii.  $j_1 = 0, j_2 = 4 \Rightarrow 4 \leq j \leq 4$ .  $j = 4$  est dans l'intervalle  $\Rightarrow$  OUI.
- iii.  $j_1 = 3/2, j_2 = 3/2 \Rightarrow 0 \leq j \leq 3$ .  $j = 3/2$  est bien dans l'intervalle, mais  $j_1 + j_2 + j = 3/2 + 3/2 + 3/2 = 9/2$  n'est pas un entier  $\Rightarrow$  NON.
- iv.  $j_1 = 5/2, j_2 = 2 \Rightarrow 1/2 \leq j \leq 9/2$ .  $j = 1/2$  est bien dans l'intervalle et  $j_1 + j_2 + j = 5/2 + 2 + 1/2 = 5$  est un entier  $\Rightarrow$  OUI.
- v.  $j_1 = 3, j_2 = 3/2 \Rightarrow 3/2 \leq j \leq 9/2$ . Or  $j = 1/2 < 3/2 \Rightarrow$  NON

(c) Encore une fois on vérifie que l'égalité  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$  est bien vérifiée et on se rappelle que de façon équivalente, on peut vérifier

$$|j - j_2| \leq j_1 \leq j + j_2 \quad \text{ou} \quad |j - j_1| \leq j_2 \leq j + j_1$$

- i.  $j = 2 \leq j \leq 5 \Rightarrow j \in \{2, 3, 4, 5\}$ .
- ii.  $j = 1 \leq j \leq 5 \Rightarrow j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
- iii.  $j = 5/2 \leq j \leq 9/2 \Rightarrow j \in \{5/2, 7/2, 9/2\}$ .
- iv.  $j = 5/2 \leq j \leq 5/2 \Rightarrow j = 5/2$ .
- v.  $j = 6 \leq j \leq 6 \Rightarrow j = 6$ .

### Exercice 3

- (a) Pour résoudre cet exercice on va d'abord écrire la représentation matricielle de  $\mathbf{J}^2$  dans la base découplée  $|lm_lsm_s\rangle = |l m_l\rangle \otimes |s m_s\rangle$ . On va ensuite diagonaliser cette matrice pour trouver les vecteurs propres que l'on nommera  $|JM\rangle$ . Ces vecteurs formeront la base couplée.

Dans la base découplée, l'action des différents opérateurs sur les état  $|lm'_lsm'_s\rangle$  est donnée par les formule suivante. Notez que pour simplifier le problème, on pose  $\hbar = 1$ . On utilise également le fait que  $s = 1/2$ .

$$\begin{aligned} L_z |lm_l\rangle &= m_l |lm_lsm_s\rangle, \\ \mathbf{L}^2 |lm_l\rangle &= l(l+1) |lm_lsm_s\rangle \\ L_{\pm} |lm_l\rangle &= \sqrt{l(l+1) - m_l(m_l \pm 1)} |l, m_l \pm 1, s, m_s\rangle \\ S_z |sm_s\rangle &= m_s |lm_lsm_s\rangle, \\ \mathbf{S}^2 |sm_s\rangle &= \frac{3}{4} |lm_lsm_s\rangle \\ S_{\pm} |sm_s\rangle &= \sqrt{3/4 - m_s(m_s \pm 1)} |l, m_l, s, m_s \pm 1\rangle \end{aligned}$$

Revenons maintenant à  $\mathbf{J}^2$  que l'on veut exprimer premièrement sous forme de matrice dans la base découplée. Pour ce faire, on exprime  $\mathbf{J}^2$  ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2, \\ &= \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}, \\ &= \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2(L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z), \end{aligned}$$

car  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{S}$  commutent. En utilisant les opérateurs d'échelle on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2 \left( \frac{L_+ + L_-}{2} \frac{S_+ + S_-}{2} + \frac{L_+ - L_-}{2i} \frac{S_+ - S_-}{2i} + L_z S_z \right) \\ &= \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z + \frac{1}{2} (L_+ S_+ + L_+ S_- + L_- S_+ + L_- S_-) \\ &\quad - \frac{1}{2} (L_+ S_+ - L_+ S_- - L_- S_+ + L_- S_-) \\ &= \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z + L_+ S_- + L_- S_+. \end{aligned}$$

L'avantage de cette méthode est que l'on connaît l'action des différents opérateurs sur la états de la base découplée et on peut donc facilement calculer les éléments de matrice de  $\mathbf{J}^2$  donnés par

$$\langle lm_lsm_s | \mathbf{J}^2 | lm'_lsm'_s \rangle = \langle lm_lsm_s | \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z + L_+ S_- + L_- S_+ | lm'_lsm'_s \rangle,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \langle lm_lsm_s | \mathbf{J}^2 | lm'_lsm'_s \rangle &= \langle lm_lsm_s | \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z | lm'_lsm'_s \rangle + \langle lm_lsm_s | L_+ S_- | lm'_lsm'_s \rangle \\ &\quad + \langle lm_lsm_s | L_- S_+ | lm'_lsm'_s \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Le premier terme de (1) est facile à calculer et vaut

$$\langle lm_lsm_s | \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z | lm'_lsm'_s \rangle = \left( l(l+1) + \frac{3}{4} + 2m'_l m'_s \right) \langle lm_lsm_s | lm'_lsm'_s \rangle.$$

Comme les états  $|lm_lsm_s\rangle$  forment une base, ils sont orthonormés, et on a donc

$$\langle lm_lsm_s | \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z | lm'_lsm'_s \rangle = \left( l(l+1) + \frac{3}{4} + 2m_l m_s \right) \delta_{m_l m'_l} \delta_{m_s m'_s},$$

Le second terme de (1) quant à lui donne

$$\begin{aligned}\langle lm_l sm_s | L_+ S_- | lm'_l sm'_s \rangle &= \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l+1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s-1)} \langle lm_l sm_s | l, m'_l+1, s, m'_s-1 \rangle \\ &= \underbrace{\sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l+1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s-1)}}_A \delta_{m_l, m'_l+1} \delta_{m_s, m'_s-1}.\end{aligned}$$

De la même façon, on a pour le troisième terme

$$\begin{aligned}\langle lm_l sm_s | L_- S_+ | lm'_l sm'_s \rangle &= \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l-1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s+1)} \langle lm_l sm_s | l, m'_l-1, s, m'_s+1 \rangle \\ &= \underbrace{\sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l-1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s+1)}}_B \delta_{m_l, m'_l-1} \delta_{m_s, m'_s+1}.\end{aligned}$$

Ainsi, les éléments de la matrice de l'opérateur  $\mathbf{J}^2$  dans la base des états  $|lm_l sm_s\rangle$  sont

$$\langle lm_l sm_s | \mathbf{J}^2 | lm'_l sm'_s \rangle = \left( l(l+1) + \frac{3}{4} + 2m_l m_s \right) \delta_{m_l m'_l} \delta_{m_s m'_s} + A \delta_{m_l, m'_l+1} \delta_{m_s, -1/2} + B \delta_{m_l, m'_l-1} \delta_{m_s, 1/2}$$

Pour représenter ces éléments de matrice, il nous faut définir une convention. Le plus simple est de les représenter sous la forme d'une matrice carrée de dimensions  $2(2l+1)$  ( $m_s$  peut prendre deux valeurs et  $m_l$  peut prendre  $2l+1$  valeurs car  $-l \leq m_l \leq l$ ). Selon ma convention les valeurs de  $m_l$  grandissent quand on descend dans les lignes ou que l'on va vers la droite dans les colonnes. Selon ma convention toujours, je choisis également de répéter à chaque fois la valeur de  $m_l$  en l'associant une fois avec un spin  $-1/2$  puis ensuite avec le spin  $1/2$ . Notez qu'il est très important d'étiqueter de la même façon les lignes et les colonnes.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} -l, -1/2 \\ -l, +1/2 \\ -l+1, -1/2 \\ -l+1, +1/2 \\ \vdots \\ \vdots \\ l, -1/2 \\ l, +1/2 \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} \begin{matrix} -l, -1/2 & -l, +1/2 & -l+1, -1/2 & -l+1, +1/2 & \cdots & \cdots & l, -1/2 & l, +1/2 \end{matrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

On voit donc que l'on a défini notre matrice de façon à ce que les lignes et les colonnes croissent respectivement avec la valeur de  $m'_l$  et la valeur de  $m_l$ . En outre, pour chaque valeur de  $m'_l$  (resp.  $m_l$ ), on a deux lignes (resp. deux colonnes) correspondant aux deux valeurs  $-1/2$  et  $+1/2$  de  $m'_s$  (resp. de  $m_s$ ).

Cherchons maintenant à exprimer la matrice en mettant en évidence ses éléments non nuls :

- soit  $m_l = m'_l$  et  $m_s = m'_s$  et donc  $\langle lm_l sm_s | \mathbf{J}^2 | lm'_l sm'_s \rangle = l(l+1) + 3/4 + 2m_l m_s$  ;
- soit  $m_l = m'_l + 1$  et  $m_s = m'_s - 1$   
et donc  $\langle lm_l sm_s | \mathbf{J}^2 | lm'_l sm'_s \rangle = \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l+1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s-1)}$  ;
- soit  $m_l = m'_l - 1$  et  $m_s = m'_s + 1$   
et donc  $\langle lm_l sm_s | \mathbf{J}^2 | lm'_l sm'_s \rangle = \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l-1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s+1)}$ .

Clairement les seuls éléments non-nuls se trouveront sur la diagonale, la ligne en dessous et la ligne et dessus. De plus, l'état  $|l, m'_l + 1, s, m'_s - 1\rangle$  n'existe que si  $m'_s = 1/2$ . En effet, si  $m'_s$  était égale à  $-1/2$ , on aurait  $m_s = 3/2$  ce qui est impossible. De la même façon,  $|l, m'_l - 1, s, m'_s + 1\rangle$  n'existe que si  $m'_s = -1/2$ . Cela rajoute donc des zéros. Au final, la matrice aura l'allure suivante (notez que les x ne font qu'indiquer l'emplacement d'une valeur non-nulle et ne valent pas tous la même chose).

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
& -l, -1/2 & -l, +1/2 & -l + 1, -1/2 & -l + 1, +1/2 & \dots & \dots & l, -1/2 & l, +1/2 \\
-l, -1/2 & \color{green}{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
-l, +1/2 & 0 & \color{red}{X} & \color{red}{X} & 0 & 0 & & & 0 \\
-l + 1, -1/2 & 0 & \color{red}{X} & \color{red}{X} & 0 & 0 & \dots & & 0 \\
-l + 1, +1/2 & 0 & 0 & 0 & \color{blue}{X} & \color{blue}{X} & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\
l, -1/2 & & & & & & & \color{orange}{X} & 0 \\
l, +1/2 & 0 & 0 & \dots & & & & 0 & \color{red}{X}
\end{array}
\end{array}$$

On note que cette dernière est bloc-diagonale et que pour la diagonaliser, il suffit de diagonaliser bloc par bloc. Le premier bloc est le bloc  $1 \times 1$  où  $m_l = m'_l = -l$  et  $m_s = m'_s = -1/2$ . Sa valeur propre est  $l^2 + 2l + 3/4$ . Le deuxième bloc est

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
& -l, +1/2 & \\
-l, +1/2 & \left( \begin{array}{cc}
& l(l+1) + 3/4 + 2m_l m_s & \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l - 1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s + 1)} \\
\sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l + 1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s - 1)} & l(l+1) + 3/4 + 2m_l m_s
\end{array} \right) & \\
-l + 1, -1/2 & & \\
& & -l + 1, -1/2
\end{array}
\end{array}$$

ou encore

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
& -l, +1/2 & -l + 1, -1/2 \\
-l, +1/2 & \left( \begin{array}{cc}
l(l+1) + 3/4 - l & \sqrt{2l} \\
\sqrt{2l} & l(l+1) + 3/4 + l - 1
\end{array} \right) & \\
-l + 1, -1/2 & & 
\end{array}
\end{array}$$

De façon plus générale, définissons

$$M = m_l + m_s$$

Ainsi,  $m_l = M - m_s$  et on peut donc écrire n'importe quel bloc diagonal de la matrice de la façon suivante :

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
& m'_l = m_l, m'_s = 1/2 & m'_l = m_l + 1, m'_s = -1/2 \\
m_l, m_s = 1/2 & \left( \begin{array}{cc}
l(l+1) + 3/4 + M - 1/2 & \sqrt{l(l+1) - M^2 + 1/4} \\
\sqrt{l(l+1) - M^2 + 1/4} & l(l+1) + 3/4 - M - 1/2
\end{array} \right) & \\
m_l + 1, m_s = -1/2 & & 
\end{array}
\end{array}$$

Appelons cette matrice  $T$ . On remarque que dans cette matrice, la valeur de  $M$  est constante. en fait, chaque sous-matric 2x2 sera représentée par une valeur de  $M$  différente.

Pour trouver les valeurs propres de  $T$  il suffit de résoudre

$$\begin{aligned}
& \det(T - \lambda \mathbb{I}) = 0, \\
& \Leftrightarrow (l(l+1) + 1/4 - \lambda + M)(l(l+1) + 1/4 - \lambda - M) - l(l+1) + M^2 - 1/4 = 0 \\
& \Leftrightarrow (l(l+1) + 1/4 - \lambda)^2 - M^2 - l(l+1) + M^2 - 1/4 = 0 \\
& \Leftrightarrow (l(l+1) + 1/4 - \lambda)^2 = l(l+1) + 1/4 \\
& \Leftrightarrow (l(l+1) + 1/4 - \lambda) = \pm \sqrt{l(l+1) + 1/4} \\
& \Leftrightarrow \lambda = (l(l+1) + 1/4) \pm \sqrt{l(l+1) + 1/4} \\
& \Leftrightarrow \lambda = (l^2 + l + 1/4) \pm \sqrt{l^2 + l + 1/4} \\
& \Leftrightarrow \lambda = (l + 1/2)^2 \pm \sqrt{(l + 1/2)^2} \\
& \Leftrightarrow \lambda = (l + 1/2)^2 \pm (l + 1/2) \\
& \Leftrightarrow \lambda = (l + 1/2)(l + 1/2 \pm 1)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc

$$\lambda_- = (l + 1/2)(l - 1/2), \quad \lambda_+ = (l + 1/2)(l + 3/2). \quad (2)$$

et la matrice  $T$  diagonalisée peut donc s'écrire sous la forme

$$T_{diag.} = \begin{pmatrix} (l + 1/2)(l + 3/2) & 0 \\ 0 & (l + 1/2)(l - 1/2) \end{pmatrix}.$$

Il reste maintenant à calculer les états propres de  $J^2$ . Ces derniers que l'on appelle  $|JM\rangle$  sont en fait les états propres de l'ECOC  $\{L^2, S^2, J^2, J_z\}$ . Ils peuvent être calculés grâce à la formule suivante qui les lie aux états  $|l m_l s m_s\rangle$  par l'intermédiaire des coefficients de Clebsch-Gordan.

$$|JM\rangle = \sum_{m_l, m_s} \langle l, m_l, 1/2, m_s | JM \rangle |l, m_l, 1/2, m_s\rangle$$

Notez que dans cette formule, la somme

$$m_l + m_s = M$$

doit toujours être respectée. Cette formule peut se comprendre ainsi : Les vecteurs propres  $|JM\rangle$  formant une nouvelle base, ils s'écrivent comme une combinaison linéaire des vecteurs de l'ancienne base, les  $|l, m_l, 1/2, m_s\rangle$ .

On peut aussi donner une autre interprétation à cette équation : Puisque les  $|l, m_l, 1/2, m_s\rangle$  sont des vecteurs propres de  $L^2$  et  $S^2$ , n'importe quelle combinaison linéaire restera des également vecteur propre de ces deux opérateurs. Toutefois, ils ne sont pas vecteurs propres de  $J^2$ . On cherche donc la combinaison linéaire correcte qui nous donne des nouveaux vecteurs propres également vecteurs propres de  $J^2$  (et par la même occasion de  $J_z$ ). Ainsi, on trouve un ensemble de vecteurs propres communs à tous les opérateurs de notre ECOC.

- (b) Cherchons maintenant la valeurs des coefficients de Clebsch-Gordon. Ces coefficients sont simples à calculer pour les valeurs limites de  $M$ , c'est-à-dire quand  $M = \pm(l + 1/2)$  En effet,
- Si  $M = -l - 1/2$  alors forcément  $m_l = m'_l = -l$ ,  $m_s = m'_s = -1/2$ . Ainsi, il n'y a qu'une seule possibilité pour les valeurs de  $m_l$  ou  $m_s$  et donc la somme se réduit à un seul terme. Le coefficient unique de Clebsch-Gordon est donc forcément 1 (pour la normalisation) ;

— De la même façon, si  $M = l + 1/2 \Rightarrow m_l = m'_l = l, m_s = m'_s = 1/2$ . À nouveau il ne reste qu'un terme dans la somme et le coefficient vaut 1.

Par ailleurs, comme les valeurs de  $M$  vont de  $-J$  à  $J$ , pour ces cas là,  $J$  vaut forcément  $l + 1/2$ . On peut donc écrire le premier et le dernier vecteur propre  $|JM\rangle$  comme la combinaison suivante des  $|l, m_l, 1/2, m_s\rangle$

$$|l + 1/2, -l - 1/2\rangle = |l, -l, 1/2, -1/2\rangle$$

$$|l + 1/2, l + 1/2\rangle = |l, l, 1/2, 1/2\rangle$$

Pour les vecteurs propre suivantes, chaque sous-matrice  $2 \times 2$  correspond à des états ayant le même  $M$ , mais pas le même  $J$ . Par convention, on a associé la première colonne à la valeur propre  $\lambda_+$ . On se souvient que c'est la valeur propre de la matrice de  $J^2$  et donc on sait qu'elle vaut  $J(J + 1)$  (c'est la valeur propre de n'importe quel moment cinétique au carré). Pour obtenir  $\lambda_+$ , il faut donc que  $J = l + 1/2$  ( et pour obtenir  $\lambda_-$ , il faut que  $J = l - 1/2$ ). Ainsi, on associe la première colonne à  $J = l + 1/2$  et la deuxième à  $J = l - 1/2$ .

D'après la formule données ci-dessus, on sait donc que chaque vecteur propre  $|JM\rangle$  s'écrira comme une combinaison linéaire de deux états  $|l, m_l, 1/2, 1/2\rangle$  et  $|l, m_l + 1, 1/2, -1/2\rangle$ . Pour connaître la valeur des coefficients de Clebsch-Gordon, il reste donc à trouver les vecteurs propres de la matrices T. Pour cela, on résout

$$T \begin{pmatrix} a_{\pm} \\ b_{\pm} \end{pmatrix} = \lambda_{\pm} \begin{pmatrix} a_{\pm} \\ b_{\pm} \end{pmatrix}.$$

On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} (l(l + 1) + 1/4 - M) a_{\pm} + \sqrt{l(l + 1) + 1/4 - M^2} b_{\pm} &= \lambda_{\pm} a_{\pm}, \\ \sqrt{l(l + 1) + 1/4 - M^2} a_{\pm} + (l(l + 1) + 1/4 + M) b_{\pm} &= \lambda_{\pm} b_{\pm}. \end{aligned} \quad (3)$$

Résolvons la première équation pour  $\lambda_+ = (l + 1/2)(l + 3/2)$ . On se rappelle que ce sera l'état propre associé à  $J = l + 1/2$ .

$$\begin{aligned} (l(l + 1) + 1/4 - M - (l^2 + 2l + 3/4)) a_+ + \sqrt{l(l + 1) + 1/4 - M^2} b_+ &= 0, \\ \Leftrightarrow (-l - 1/2 - M) a_+ + \sqrt{(l + 1/2 + M)(l + 1/2 - M)} b_+ &= 0, \\ \Rightarrow b_+ &= a_+ \sqrt{\frac{(l + 1/2 + M)}{(l + 1/2 - M)}}. \end{aligned}$$

La condition de normalisation impose :

$$\begin{aligned} a_+^2 + b_+^2 &= 1, \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{(l + 1/2 + M)}{(l + 1/2 - M)}\right) a_+^2 &= 1, \end{aligned}$$

donc

$$a_+ = \pm \sqrt{\frac{l + 1/2 - M}{2l + 1}}. \quad (4)$$

et

$$b_+ = \pm \sqrt{\frac{l + 1/2 + M}{2l + 1}}, \quad (5)$$

On peut choisir le signe qu'on veut pour  $a_+$  car cela ne fait que rajouter une phase globale, qui n'est pas mesurable. Il faut tout de même faire attention car le choix du signe de  $a_+$  fixe le signe de  $b_+$ . Ici, il faut prendre les deux mêmes signes pour  $a_+$  et  $b_+$ . Nous choisissons donc

$$a_+ = \sqrt{\frac{l+1/2-M}{2l+1}}, \quad (6)$$

$$b_+ = \sqrt{\frac{l+1/2+M}{2l+1}}. \quad (7)$$

$a_+$  est le coefficient de Clebsch-Gordon en avant de l'état  $|l, m_l, 1/2, 1/2\rangle$  et  $b_+$  est le coefficient de Clebsch-Gordon en avant de l'état  $|l, m_l + 1, 1/2, -1/2\rangle$ . En d'autres mots,

$$|JM\rangle = |l+1/2, m_l+1/2\rangle = \sqrt{\frac{l+1/2-M}{2l+1}} |l, m_l, 1/2, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{l+1/2+M}{2l+1}} |l, m_l+1, 1/2, -1/2\rangle$$

De la même façon, résolvons la première équation pour  $\lambda_- = (l+1/2)(l-1/2)$ . Cette fois, on aura l'état propre associé à  $J = l-1/2$ .

$$\begin{aligned} (l(l+1) + 1/4 - M - (l^2 - 1/4)) a_- + \sqrt{(l+1/2+M)(l+1/2-M)} b_- &= 0, \\ \Leftrightarrow (l+1/2-M) a_- + \sqrt{(l+1/2+M)(l+1/2-M)} b_- &= 0, \\ \Leftrightarrow b_- &= -a_- \sqrt{\frac{l+1/2-M}{l+1/2+M}}. \end{aligned}$$

La condition de normalisation impose :

$$\begin{aligned} a_-^2 + b_-^2 &= 1, \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{l+1/2-M}{l+1/2+M}\right) a_-^2 &= 1, \end{aligned}$$

donc

$$a_- = \mp \sqrt{\frac{l+1/2+M}{2l+1}}. \quad (8)$$

et

$$b_- = \pm \sqrt{\frac{l+1/2-M}{2l+1}}, \quad (9)$$

On peut choisir le signe qu'on veut pour  $a_-$  en faisant attention car le choix du signe de  $a_-$  fixe le signe de  $b_-$ . Ici, il faut prendre deux signes différents pour  $a_-$  et  $b_-$ . Nous choisissons donc :

$$a_- = -\sqrt{\frac{l+1/2+M}{2l+1}}, \quad (10)$$

$$b_- = \sqrt{\frac{l+1/2-M}{2l+1}}. \quad (11)$$

À nouveau,  $a_-$  est le coefficient de Clebsch-Gordon en avant de l'état  $|l, m_l, 1/2, 1/2\rangle$  et  $b_-$  est le coefficient de Clebsch-Gordon en avant de l'état  $|l, m_l + 1, 1/2, -1/2\rangle$ . En d'autres mots,

$$|JM\rangle = |l-1/2, m_l+1/2\rangle = -\sqrt{\frac{l+1/2+M}{2l+1}} |l, m_l, 1/2, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{l+1/2-M}{2l+1}} |l, m_l+1, 1/2, -1/2\rangle$$