Mécanique Quantique 1 —– CORRIGÉ

Séance d'exercices 7 : Composition de moments cinétique

Exercice 1

Calculons d'abord les relations de commutations des moments cinétiques :

$$[J_x, J_y] = [J_{x_1} + J_{x_2}, J_{y_1} + J_{y_2}] = [J_{x_1}, J_{y_1}] + [J_{x_2}, J_{y_2}] = i\hbar J_{z_1} + i\hbar J_{z_2} = i\hbar J_z$$

où on a utilisé le fait que toutes les composantes de $\mathbf{J_1}$ et $\mathbf{J_2}$ commutent entre elles puisqu'elles n'appartiennent pas au même espace.
De la même façon,

$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x \qquad [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

On peut maintenant calculer le produit vectoriel de $\mathbf{J}$ avec lui-même :

$$\mathbf{J} \times \mathbf{J} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ J_x & J_y & J_z \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix} = \hat{i}[J_y, J_z] - \hat{j}[J_x, J_z] + \hat{k}[J_x, J_y] = \hat{i}i\hbar J_x - \hat{j}(-i\hbar J_y) + \hat{k}i\hbar J_z = i\hbar\mathbf{J}$$

Pour montrer ensuite que $\{J^2, Jz, J_1^2, J_2^2\}$ forment un ECOC, il faut montrer que tous ces opérateurs commutent entre eux.
Il est trivial que J_1^2 et J_2^2 commutent puisqu'ils n'appartiennent pas au même sous-espace. Il faut cependant vérifier les autres relations. Pour calculer, on utilise le fait que

$$J^2 = J_1^2 + 2\mathbf{J_1}\mathbf{J_2} + J_2^2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left[J^2, J_1^2\right] &= [J_1^2 + 2J_1J_2 + J_2^2, J_1^2] \\
&= [J_1^2, J_1^2] + 2[J_1J_2, J_1^2] + [J_2^2, J_1^2] \\
&= 0 + 2J_1[J_2, J_1^2] + 2[J_1, J_1^2]J_2 + 0 \\
&= 0 \\
\left[J^2, J_2^2\right] &= [J_1^2 + 2J_1J_2 + J_2^2, J_2^2] \\
&= [J_1^2, J_2^2] + 2[J_1J_2, J_2^2] + [J_2^2, J_2^2] \\
&= 0 + 2J_1[J_2, J_2^2] + 2[J_1, J_2^2]J_2 + 0 \\
&= 0 \\
\left[J_1^2, J_z\right] &= [J_{x_1}^2 + J_{y_1}^2 + J_{z_1}^2, J_{z_1} + J_{z_2}] \\
&= [J_{x_1}^2 + J_{y_1}^2 + J_{z_1}^2, J_{z_1}] + [J_{x_1}^2 + J_{y_1}^2 + J_{z_1}^2, J_{z_2}] \\
&= J_{x_1}[J_{x_1}, J_{z_1}] + [J_{x_1}, J_{z_1}]J_{x_1} + J_{y_1}[J_{y_1}, J_{z_1}] + [J_{y_1}, J_{z_1}]J_{y_1} + [J_{z_1}^2, J_{z_1}] + 0 \\
&= i\hbar(-J_{x_1}J_{y_1} - J_{y_1}J_{x_1} + J_{x_1}J_{y_1} + J_{y_1}J_{x_1}) \\
&= 0 \\
\left[J_2^2, J_z\right] &= [J_{x_2}^2 + J_{y_2}^2 + J_{z_2}^2, J_{z_1} + J_{z_2}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

et, en utilisant les résultats ci-dessus

$$\begin{aligned}
[J^2, J_z] &= [J_1^2 + 2J_1J_2 + J_2^2, J_z] \\
&= [J_1^2, J_z] + 2[J_1J_2, J_z] + [J_2^2, J_z] \\
&= 0 + 2[J_{x_1}J_{x_2} + J_{y_1}J_{y_2} + J_{z_1}J_{z_2}, J_{z_1} + J_{z_2}] \\
&= 2\Big(J_{x_1}[J_{x_2}, J_{z_1}] + [J_{x_1}, J_{z_1}]J_{x_2} + J_{x_1}[J_{x_2}, J_{z_2}] + [J_{x_1}, J_{z_2}]J_{x_2} \\
&\quad + J_{y_1}[J_{y_2}, J_{z_1}] + [J_{y_1}, J_{z_1}]J_{y_2} + J_{y_1}[J_{y_2}, J_{z_2}] + [J_{y_1}, J_{z_2}]J_{y_2} \Big) \\
&= 2\Big(0 - i\hbar J_{y_1}J_{x_2} - i\hbar J_{x_1}J_{y_2} + 0 + 0 + i\hbar J_{x_1}J_{y_2} + i\hbar J_{y_1}J_{x_2} + 0 \Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, tous les opérateurs commutent entre eux et ils forment bien un ECOC.

Exercice 2

(a) Pour donner les résultats possible, il suffit d'utiliser l'inégalité

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

et de se rappeler que $j_1 + j_2 + j$ doit être entier. Ainsi,

i. $J = 1 \oplus 1 \Rightarrow 0 \leq J \leq 2 \Rightarrow J \in \{0,\, 1,\, 2\}$.

ii. $J = 3/2 \oplus 5 \Rightarrow 7/2 \leq J \leq 13/2 \Rightarrow J \in \{7/2,\, 9/2,\, 11/2,\, 13/2\}$.

iii. $J = 3/2 \oplus 5/2 \Rightarrow 1 \leq J \leq 4 \Rightarrow J \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$.

iv. $J = 0 \oplus 4 \Rightarrow 4 \leq J \leq 4 \Rightarrow J = 4$.

v. $J = 5/2 \oplus 5/2 \Rightarrow 0 \leq J \leq 5 \Rightarrow J \in \{0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5\}$.

(b) Pour vérifier les relations triangulaires, on utilise la mêmes inégalité

i. $j_1 = 3,\ j_2 = 5 \Rightarrow 2 \leq j \leq 8$. Or $j = 1 < 2 \Rightarrow$ NON.

ii. $j_1 = 0,\ j_2 = 4 \Rightarrow 4 \leq j \leq 4$. $j = 4$ est dans l'intervalle $\Rightarrow$ OUI.

iii. $j_1 = 3/2,\ j_2 = 3/2 \Rightarrow 0 \leq j \leq 3$. $j = 3/2$ est bien dans l'intervalle, mais mais $j_1 + j_2 + j = 3/2 + 3/2 + 3/2 = 9/2$ n'est pas un entier $\Rightarrow$ NON.

iv. $j_1 = 5/2,\ j_2 = 2 \Rightarrow 1/2 \leq j \leq 9/2$. $j = 1/2$ est bien dans l'intervalle et $j_1 + j_2 + j = 5/2 + 2 + 1/2 = 5$ est un entier $\Rightarrow$ OUI.

v. $j_1 = 3,\ j_2 = 3/2 \Rightarrow 3/2 \leq j \leq 9/2$. Or $j = 1/2 < 3/2 \Rightarrow$ NON

(c) Encore une fois on vérifie que l'égalité $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ est bien vérifiée et on se rappelle que de façon équivalente, on peut vérifier

$$|j_- j_2| \leq j_1 \leq j + j_2 \qquad \text{ou} \qquad |j - j_1| \leq j_2 \leq j + j_1$$

i. $j = 2 \leq j \leq 5 \Rightarrow j \in \{2,\, 3,\, 4,\, 5\}$.

ii. $j = 1 \leq j \leq 5 \Rightarrow j \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5\}$.

iii. $j = 5/2 \leq j \leq 9/2 \Rightarrow j \in \{5/2,\, 7/2,\, 9/2\}$.

iv. $j = 5/2 \leq j \leq 5/2 \Rightarrow j = 5/2$.

v. $j = 6 \leq j \leq 6 \Rightarrow j = 6$.

Exercice 3

(a) Pour résoudre cet exercice on va d'abord écrire la représentation matricielle de $\mathbf{J}^2$ dans la base découplée $|lm_lsm_s\rangle = |l\ m_l\rangle \otimes |s\ m_s\rangle$. On va ensuite diagonaliser cette matrice pour trouver les vecteurs propres que l'on nommera $|JM\rangle$. Ces vecteurs formeront la base couplée.

Dans la base découplée, l'action des différents opérateurs sur les état $|lm_l'sm_s'\rangle$ est donnée par les formule suivante. Notez que pour simplifier le problème, on pose $\hbar = 1$. On utilise également le fait que $s = 1/2$.

$$\begin{aligned}
L_z\,|lm_lsm_s\rangle &= m_l\,|lm_lsm_s\rangle\,, \\
\mathbf{L}^2\,|lm_lsm_s\rangle &= l(l+1)\,|lm_lsm_s\rangle \\
L_\pm\,|lm_lsm_s\rangle &= \sqrt{l(l+1)-m_l(m_l\pm1)}\,|l,m_l\pm1,s,m_s\rangle \\
S_z\,|lm_lsm_s\rangle &= m_s\,|lm_lsm_s\rangle\,, \\
\mathbf{S}^2\,|lm_lsm_s\rangle &= \frac{3}{4}\,|lm_lsm_s\rangle \\
S_\pm\,|lm_lsm_s\rangle &= \sqrt{3/4-m_s(m_s\pm1)}\,|l,m_l,s,m_s\pm1\rangle
\end{aligned}$$

Revenons maintenant à $\mathbf{J}^2$ que l'on veut exprimer premièrement sous forme de matrice dans la base découplée. Pour ce faire, on exprime $\mathbf{J}^2$ ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^2 &= (\mathbf{L}+\mathbf{S})^2\,, \\
&= \mathbf{L}^2+\mathbf{S}^2+\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}+\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}, \\
&= \mathbf{L}^2+\mathbf{S}^2+2\left(L_xS_x+L_yS_y+L_zS_z\right),
\end{aligned}$$

car $\mathbf{L}$ et $\mathbf{S}$ commutent. En utilisant les opérateurs d'échelle on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^2 &= \mathbf{L}^2+\mathbf{S}^2+2\left(\frac{L_++L_-}{2}\frac{S_++S_-}{2}+\frac{L_+-L_-}{2\mathrm{i}}\frac{S_+-S_-}{2\mathrm{i}}+L_zS_z\right) \\
&= \mathbf{L}^2+\mathbf{S}^2+2L_zS_z+\frac{1}{2}\left(L_+S_++L_+S_-+L_-S_++L_-S_-\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(L_+S_+-L_+S_--L_-S_++L_-S_-\right) \\
&= \mathbf{L}^2+\mathbf{S}^2+2L_zS_z+L_+S_-+L_-S_+.
\end{aligned}$$

L'avantage de cette méthode est que l'on connait l'action des différents opérateurs sur la états de la base découplée et on peut donc facilement calculer les éléments de matrice de $\mathbf{J}^2$ donnés par

$$\langle lm_lsm_s|\mathbf{J}^2|lm_l'sm_s'\rangle = \langle lm_lsm_s|\mathbf{L}^2+\mathbf{S}^2+2L_zS_z+L_+S_-+L_-S_+|lm_l'sm_s'\rangle,$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\langle lm_lsm_s|\mathbf{J}^2|lm_l'sm_s'\rangle = \langle lm_lsm_s|\mathbf{L}^2+\mathbf{S}^2+2L_zS_z|lm_l'sm_s'\rangle + \langle lm_lsm_s|L_+S_-|lm_l'sm_s'\rangle \\
+ \langle lm_lsm_s|L_-S_+|lm_l'sm_s'\rangle.
\end{aligned} \tag{1}$$

Le premier terme de (1) est facile à calculer et vaut

$$\langle lm_lsm_s|\mathbf{L}^2+\mathbf{S}^2+2L_zS_z|lm_l'sm_s'\rangle = \left(l(l+1)+\frac{3}{4}+2m_l'm_s'\right)\langle lm_lsm_s|lm_l'sm_s'\rangle.$$

Comme les états $|lm_lsm_s\rangle$ forment une base, ils sont orthonormés, et on a donc

$$\langle lm_lsm_s|\mathbf{L}^2+\mathbf{S}^2+2L_zS_z|lm_l'sm_s'\rangle = \left(l(l+1)+\frac{3}{4}+2m_lm_s\right)\delta_{m_lm_l'}\delta_{m_sm_s'},$$

Le second terme de (1) quant à lui donne

$$\begin{aligned}
\langle lm_l sm_s|L_+S_-|lm_l' sm_s'\rangle &= \sqrt{l(l+1)-m_l'(m_l'+1)}\sqrt{3/4-m_s'(m_s'-1)}\langle lm_l sm_s|l,m_l'+1,s,m_s'-1\rangle \\
&= \underbrace{\sqrt{l(l+1)-m_l'(m_l'+1)}\sqrt{3/4-m_s'(m_s'-1)}}_{A}\,\delta_{m_l,m_{l'}+1}\delta_{m_s,m_{s'}-1}.
\end{aligned}$$

De la même façon, on a pour le troisième terme

$$\begin{aligned}
\langle lm_l sm_s|L_-S_+|lm_l' sm_s'\rangle &= \sqrt{l(l+1)-m_l'(m_l'-1)}\sqrt{3/4-m_s'(m_s'+1)}\langle lm_l sm_s|l,m_l'-1,s,m_s'+1\rangle \\
&= \underbrace{\sqrt{l(l+1)-m_l'(m_l'-1)}\sqrt{3/4-m_s'(m_s'+1)}}_{B}\,\delta_{m_l,m_{l'}-1}\delta_{m_s,m_{s'}+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les éléments de la matrice de l'opérateur $\mathbf{J}^2$ dans la base des états $|lm_l sm_s\rangle$ sont

$$\langle lm_l sm_s|\mathbf{J}^2|lm_l' sm_s'\rangle = \left(l(l+1)+\frac{3}{4}+2m_l m_s\right)\delta_{m_l m_l'}\delta_{m_s m_s'}+A\delta_{m_l,m_{l'}+1}\delta_{m_s,-1/2}+B\delta_{m_l,m_{l'}-1}\delta_{m_s,1/2}$$

Pour représenter ces éléments de matrice, il nous faut définir une convention. Le plus simple est de les représenter sous la forme d'une matrice carrée de dimensions $2(2l+1)$ (m_s peut prendre deux valeurs et m_l peut prendre $2l+1$ valeurs car $-l \leq m_l \leq l$). Selon ma convention les valeurs de m_l grandissent quand on descend dans les lignes ou que l'on va vers la droite dans les colonnes. Selon ma convention toujours, je choisis également de répéter à chaque fois la valeur de m_l en l'associant une fois avec un spin $-1/2$ puis ensuite avec le spin $1/2$. Notez qu'il est très important d'étiqueter de la même façon les lignes et les colonnes.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} -l,-1/2 & -l,+1/2 & -l+1,-1/2 & -l+1,+1/2 & \cdots & \cdots & l,-1/2 & l,+1/2 \end{array} \\
\begin{array}{c} -l,-1/2 \\ -l,+1/2 \\ -l+1,-1/2 \\ -l+1,+1/2 \\ \vdots \\ \vdots \\ l,-1/2 \\ l,+1/2 \end{array} &
\begin{pmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\
\cdots & \cdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
\cdots & \cdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\
\cdots & \cdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
\cdots & \cdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\
\cdots & \cdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
\cdots & \cdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}$$

On voit donc que l'on a défini notre matrice de façon à ce que les lignes et les colonnes croissent respectivement avec la valeur de m_l' et la valeur de m_l. En outre, pour chaque valeur de m_l' (resp. m_l), on a deux lignes (resp. deux colonnes) correspondant aux deux valeurs $-1/2$ et $+1/2$ de m_s' (resp. de m_s).

Cherchons maintenant à exprimer la matrice en mettant en évidence ses éléments non nuls :

— soit $m_l = m_l'$ et $m_s = m_s'$ et donc $\langle lm_l sm_s|\mathbf{J}^2|lm_l' sm_s'\rangle = l(l+1)+3/4+2m_l m_s$;

— soit $m_l = m_l'+1$ et $m_s = m_s'-1$
et donc $\langle lm_l sm_s|\mathbf{J}^2|lm_l' sm_s'\rangle = \sqrt{l(l+1)-m_l'(m_l'+1)}\sqrt{3/4-m_s'(m_s'-1)}$;

— soit $m_l = m_l'-1$ et $m_s = m_s'+1$
et donc $\langle lm_l sm_s|\mathbf{J}^2|lm_l' sm_s'\rangle = \sqrt{l(l+1)-m_l'(m_l'-1)}\sqrt{3/4-m_s'(m_s'+1)}$.

Clairement les seuls éléments non-nuls se trouveront sur la diagonale, la ligne en dessous et la ligne et dessus. De plus, l'état $|l, m'_l + 1, s, m'_s - 1\rangle$ n'existe que si $m'_s = 1/2$. En effet, si m'_s était égale à $-1/2$, on aurait $m_s = 3/2$ ce qui est impossible. De la même façon, $|l, m'_l - 1, s, m'_s + 1\rangle$ n'existe que si $m'_s = -1/2$. Cela rajoute donc des zéros. Au final, la matrice aura l'allure suivante (notez que les x ne font qu'indiquer l'emplacement d'une valeur non-nulle et ne valent pas tous la même chose).

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & -l,-{}^1\!/\!_2 & -l,+{}^1\!/\!_2 & -l+1,-{}^1\!/\!_2 & -l+1,+{}^1\!/\!_2 & \cdots & \cdots & l,-{}^1\!/\!_2 & l,+{}^1\!/\!_2 \\
\hline
-l,-{}^1\!/\!_2 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\
-l,+{}^1\!/\!_2 & 0 & X & X & 0 & 0 & & & 0 \\
-l+1,-{}^1\!/\!_2 & 0 & X & X & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\
-l+1,+{}^1\!/\!_2 & 0 & 0 & 0 & X & X & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\
l,-{}^1\!/\!_2 & & & & & & & X & 0 \\
l,+{}^1\!/\!_2 & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 & X
\end{array}
$$

On note que cette dernière est bloc-diagonale et que pour la diagonaliser, il suffit de diagonaliser bloc par bloc. Le premier bloc est le bloc 1×1 où $m_l = m'_l = -l$ et $m_s = m'_s = -1/2$. Sa valeur propre est $l^2 + 2l + 3/4$. Le deuxième bloc est

$$
\begin{array}{c|cc}
 & -l,+{}^1\!/\!_2 & -l+1,-{}^1\!/\!_2 \\
\hline
-l,+{}^1\!/\!_2 & l(l+1) + {}^3\!/\!_4 + 2m_l m_s & \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l-1)}\sqrt{3/4 - m'_s(m'_s+1)} \\
-l+1,-{}^1\!/\!_2 & \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l+1)}\sqrt{3/4 - m'_s(m'_s-1)} & l(l+1) + {}^3\!/\!_4 + 2m_l m_s
\end{array}
$$

ou encore

$$
\begin{array}{c|cc}
 & -l,+{}^1\!/\!_2 & -l+1,-{}^1\!/\!_2 \\
\hline
-l,+{}^1\!/\!_2 & l(l+1) + {}^3\!/\!_4 - l & \sqrt{2l} \\
-l+1,-{}^1\!/\!_2 & \sqrt{2l} & l(l+1) + {}^3\!/\!_4 + l - 1
\end{array}
$$

De façon plus générale, définissons

$$M = m_l + m_s$$

Ainsi, $m_l = M - m_s$ et on peut donc écrire n'importe quel bloc diagonal de la matrice de la façon suivante :

$$
\begin{array}{c|cc}
 & m'_l = m_l,\ m'_s = {}^1\!/\!_2 & m'_l = m_l + 1,\ m'_s = -{}^1\!/\!_2 \\
\hline
m_l,\ m_s = {}^1\!/\!_2 & l(l+1) + {}^3\!/\!_4 + M - 1/2 & \sqrt{l(l+1) - M^2 + {}^1\!/\!_4} \\
m_l + 1,\ m_s = -{}^1\!/\!_2 & \sqrt{l(l+1) - M^2 + {}^1\!/\!_4} & l(l+1) + {}^3\!/\!_4 - M - 1/2
\end{array}
$$

Appelons cette matrice T. On remarque que dans cette matrice, la valeur de M est constante. en fait, chaque sous-matric 2x2 sera représentée par une valeur de M différente.

Pour trouver les valeurs propres de T il suffit de résoudre

$$
\begin{aligned}
&\det\left(T-\lambda\mathbb{I}\right)=0,\\
\Leftrightarrow &\left(l(l+1)+{}^{1}\!/\!{}_{4}-\lambda+M\right)\left(l(l+1)+{}^{1}\!/\!{}_{4}-\lambda-M\right)-l\left(l+1\right)++M^{2}-{}^{1}\!/\!{}_{4}=0\\
\Leftrightarrow &\left(l(l+1)+{}^{1}\!/\!{}_{4}-\lambda\right)^{2}-M^{2}-l\left(l+1\right)+M^{2}-{}^{1}\!/\!{}_{4}=0\\
\Leftrightarrow &\left(l(l+1)+{}^{1}\!/\!{}_{4}-\lambda\right)^{2}=l(l+1)+1/4\\
\Leftrightarrow &\left(l(l+1)+{}^{1}\!/\!{}_{4}-\lambda\right)=\pm\sqrt{l(l+1)+1/4}\\
\Leftrightarrow &\lambda=\left(l(l+1)+{}^{1}\!/\!{}_{4}\right)\pm\sqrt{l(l+1)+1/4}\\
\Leftrightarrow &\lambda=\left(l^{2}+l+{}^{1}\!/\!{}_{4}\right)\pm\sqrt{l^{2}+l+{}^{1}\!/\!{}_{4}}\\
\Leftrightarrow &\lambda=\left(l+{}^{1}\!/\!{}_{2}\right)^{2}\pm\sqrt{\left(l+{}^{1}\!/\!{}_{2}\right)^{2}}\\
\Leftrightarrow &\lambda=\left(l+{}^{1}\!/\!{}_{2}\right)^{2}\pm\left(l+{}^{1}\!/\!{}_{2}\right)\\
\Leftrightarrow &\lambda=\left(l+{}^{1}\!/\!{}_{2}\right)\left(l+{}^{1}\!/\!{}_{2}\pm1\right)
\end{aligned}
$$

Les valeurs propres sont donc

$$\lambda_{-}=\left(l+{}^{1}\!/\!{}_{2}\right)\left(l-{}^{1}\!/\!{}_{2}\right),\qquad \lambda_{+}=\left(l+{}^{1}\!/\!{}_{2}\right)\left(l+{}^{3}\!/\!{}_{2}\right). \tag{2}$$

et la matrice T diagonalisée peut donc s'écrire sous la forme

$$T_{diag.}=\begin{pmatrix}\left(l+{}^{1}\!/\!{}_{2}\right)\left(l+{}^{3}\!/\!{}_{2}\right) & 0\\ 0 & \left(l+{}^{1}\!/\!{}_{2}\right)\left(l-{}^{1}\!/\!{}_{2}\right)\end{pmatrix}.$$

Il reste maintenant à calculer les états propres de J^2. Ces derniers que l'on appelle $|JM\rangle$ sont en fait les états propres de l'ECOC $\{L^2,S^2,J^2,J_z\}$. Ils peuvent être calculés grâce à la formule suivante qui les lie aux états $|l\ m_l\ s\ m_s\rangle$ par l'intermédiaire des coefficients de Clebsch-Gordan.

$$|JM\rangle=\sum_{m_l,m_s}\langle l,m_l,{}^{1}\!/\!{}_{2},m_s\,|JM\rangle\;\;|l,m_l,{}^{1}\!/\!{}_{2},m_s\rangle$$

Notez que dans cette formule, la somme

$$m_l+m_s=M$$

doit toujours être respectée. Cette formule peut se comprendre ainsi : Les vecteurs propres $|JM\rangle$ formant une nouvelle base, ils s'écrivent comme une combinaison linéaire des vecteurs de l'ancienne base, les $|l,m_l,{}^{1}\!/\!{}_{2},m_s\rangle$.
On peut aussi donner une autre interprétation à cette équation : Puisque les $|l,m_l,{}^{1}\!/\!{}_{2},m_s\rangle$ sont des vecteurs propres de L^2 et S^2, n'importe quelle combinaisons linéaire restera des également vecteur propre de ces deux opérateurs. Toutefois, ils ne sont pas vecteurs propres de J^2. On cherche donc la combinaison linéaire corretcte qui nous donne des nouveaux vecteurs propres également vecteurs propres de J^2 (et par la même occasion de J_z). Ainsi, on trouve un ensemble de vecteurs propres communs à tous les opérateurs de notre ECOC.

(b) Cherchons maintenant la valeurs des coefficients de Clebsh-Gordon. Ces coefficients sont simples à calculer pour les valeurs limites de M, c'est-à-dire quand $M\;=\;\pm\left(l+{}^{1}\!/\!{}_{2}\right)$ En effet,
 — Si $M=-l-{}^{1}\!/\!{}_{2}$ alors forcément $m_l=m_l'=-l$, $m_s=m_s'={}^{-1}\!/\!{}_{2}$. Ainsi, il n'y a qu'une seule possibilité pour les valeurs de m_l ou m_s et donc la somme se réduit à un seul terme. Le coefficient unique de Clebsch-Gordon est donc forcément 1 (pour la normalisation) ;

— De la même façon, si $M = l + 1/2 \Rightarrow m_l = m_l' = l$, $m_s = m_s' = 1/2$. À nouveau il ne reste qu'un terme dans la somme et le coefficient vaut 1.

Par ailleurs, comme les valeurs de M vont de $-J$ à J, pour ces cas là, J vaut forcément $l + 1/2$
On peut donc écrire le premier et le dernier vecteur propre $|JM\rangle$ comme la combinaison suivante des $|l, m_l, 1/2, m_s\rangle$

$$|l + 1/2,\ -l - 1/2\rangle = |l, -l, 1/2, -1/2\rangle$$

$$|l + 1/2,\ l + 1/2\rangle = |l, l, 1/2, 1/2\rangle$$

Pour les vecteurs propre suivantes, chaque sous-matrice 2×2 correspond à des états ayant le même M, mais pas le même J. Par convention, on a associé la première colonne à la valeur propre λ_+. On se souvient que c'est la valeur propre de la matrice de J^2 et donc on sait qu'elle vaut $J(J+1)$ (c'est la valeur propre de n'importe quel moment cinétique au carré). Pour obtenir λ_+, il faut donc que $J = l + 1/2$ (et pour obtenir λ_-, il faut que $J = l - 1/2$). Ainsi, on associe la première colonne à $J = l + 1/2$ et la deuxième à $J = l - 1/2$.

D'après la formule données ci-dessus, on sait donc que chaque vecteur propre $|JM\rangle$ s'écrira comme une combinaison linéaire de deux états $|l, m_l, 1/2, 1/2\rangle$ et $|l, m_l + 1, 1/2, -1/2\rangle$. Pour connaître la valeur des coefficients de Clebsch-Gordon, il reste donc à trouver les vecteurs propres de la matrices T. Pour cela, on résout

$$T \begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix}.$$

On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} &\left(l(l+1) + 1/4 + M\right) a_\pm + \sqrt{l\left(l+1\right) + 1/4 - M^2}\, b_\pm = \lambda_\pm a_\pm, \\ &\sqrt{l\left(l+1\right) + 1/4 - M^2}\, a_\pm + \left(l(l+1) + 1/4 - M\right) b_\pm = \lambda_\pm b_\pm. \end{aligned} \tag{3}$$

Résolvons la première équation pour $\lambda_+ = (l + 1/2)(l + 3/2)$. On se rappelle que ce sera l'état propre associé à $J = l + 1/2$.

$$\begin{aligned} \left(l(l+1) + 1/4 + M - \left(l^2 + 2l + 3/4\right)\right) a_+ + \sqrt{l\left(l+1\right) + 1/4 - M^2}\, b_+ &= 0, \\ \Leftrightarrow \left(-l - 1/2 + M\right) a_+ + \sqrt{\left(l + 1/2 + M\right)\left(l + 1/2 - M\right)}\, b_+ &= 0, \\ \Rightarrow b_+ = a_+ \sqrt{\frac{(l + 1/2 - M)}{(l + 1/2 + M)}}. \end{aligned}$$

La condition de normalisation impose :

$$\begin{aligned} &a_+^2 + b_+^2 = 1, \\ \Leftrightarrow &\left(1 + \frac{(l + 1/2 - M)}{(l + 1/2 + M)}\right) a_+^2 = 1, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{a_+ = \pm\sqrt{\frac{l + 1/2 + M}{2l + 1}}.} \tag{4}$$

et

$$\boxed{b_+ = \pm\sqrt{\frac{l + 1/2 - M}{2l + 1}},} \tag{5}$$

On peut choisir le signe qu'on veut pour a_+ car cela ne fait que rajouter une phase globale, qui n'est pas mesurable. Il faut tout de même faire attention car le choix du signe de a_+ fixe le signe de b_+. Ici, il faut prendre les deux mêmes signes pour a_+ et b_+. Nous choisissons donc

$$a_+ = \sqrt{\frac{l + 1/2 + M}{2l+1}}, \tag{6}$$

$$b_+ = \sqrt{\frac{l + 1/2 - M}{2l+1}}. \tag{7}$$

a_+ est le coefficient de Clebsch-Grodon en avant de l'état $|l, m_l, 1/2, 1/2\rangle$ et b_+ est le coefficient de Clebsch-Gordon en avant de l'état $|l, m_l + 1, 1/2, -1/2\rangle$. En d'autres mots,

$$|JM\rangle = |l + 1/2, m_l + 1/2\rangle = \sqrt{\frac{l + 1/2 + M}{2l+1}}\,|l, m_l, 1/2, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{l + 1/2 - M}{2l+1}}\,|l, m_l + 1, 1/2, -1/2\rangle$$

De la même façon, résolvons la première équation pour $\lambda_- = (l + 1/2)(l - 1/2)$. Cette fois, on aura l'état propre associé à $J = l - 1/2$.

$$\begin{aligned}
\left(l(l+1) + 1/4 + M - \left(l^2 - 1/4\right)\right) a_- + \sqrt{\left(l + 1/2 + M\right)\left(l + 1/2 - M\right)}\,b_- &= 0, \\
\Leftrightarrow \left(l + 1/2 + M\right) a_- + \sqrt{\left(l + 1/2 + M\right)\left(l + 1/2 - M\right)}\,b_- &= 0, \\
\Leftrightarrow b_- = -a_- \sqrt{\frac{(l + 1/2 + M)}{(l + 1/2 - M)}}.
\end{aligned}$$

La condition de normalisation impose :

$$\begin{aligned}
a_-^2 + b_-^2 &= 1, \\
\Leftrightarrow \left(1 + \frac{(l + 1/2 + M)}{(l + 1/2 - M)}\right) a_-^2 &= 1,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{a_- = \mp\sqrt{\frac{l + 1/2 - M}{2l+1}}.} \tag{8}$$

et

$$\boxed{b_- = \pm\sqrt{\frac{l + 1/2 + M}{2l+1}},} \tag{9}$$

On peut choisir le signe qu'on veut pour a_- en faisant attention car le choix du signe de a_- fixe le signe de b_-. Ici, il faut prendre deux signes différents pour a_- et b_-. Nous choisissons donc :

$$a_- = -\sqrt{\frac{l + 1/2 - M}{2l+1}}, \tag{10}$$

$$b_- = \sqrt{\frac{l + 1/2 + M}{2l+1}}. \tag{11}$$

À nouveau, a_- est le coefficient de Clebsch-Grodon en avant de l'état $|l, m_l, 1/2, 1/2\rangle$ et b_- est le coefficient de Clebsch-Gordon en avant de l'état $|l, m_l + 1, 1/2, -1/2\rangle$. En d'autres mots,

$$|JM\rangle = |l - 1/2, m_l + 1/2\rangle = -\sqrt{\frac{l + 1/2 - M}{2l+1}}\,|l, m_l, 1/2, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{l + 1/2 + M}{2l+1}}\,|l, m_l + 1, 1/2, -1/2\rangle$$