Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°8 : Moment cinétique et spin 1/2

1. À partir des relations de commutation qui le définissent, montrer que tout moment cinétique satisfait la propriété étonnante suivante

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar\,\mathbf{L}$$

2. On considère l'observable $\mathbf{S}$ associée à un moment cinétique $s = 1/2$ (spin). On note $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ la base à deux dimensions des états propres communs des opérateurs $\mathbf{S^2}$ et S_z. Dans cette base :
   (a) Écrire la représentation matricielle de $\mathbf{S^2}$ et S_z.
   (b) Écrire la représentation matricielle des opérateurs échelle[1] S_+ et S_-. En déduire la représentation matricielle de l'observable $\mathbf{S}$.
3. Spin d'orientation quelconque.
   (a) Rechercher les états propres communs à $\mathbf{S^2}$ et à $S_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}$ où $\mathbf{u}$ est un vecteur unité d'orientation arbitraire (θ, φ).
   (b) Appelons ces vecteurs $|\uparrow\rangle_u$ et $|\downarrow\rangle_u$ et supposons que l'on ait préparé l'état $|\uparrow\rangle_u$. Analyser les mesures (résultats et probabilités) de
      i. S_z,
      ii. S_x,
      iii. S_z puis S_x.

      Commenter.
4. Précession de Larmor : le hamiltonien d'une particule de spin 1/2 dans un champ magnétique d'amplitude B uniforme orienté suivant l'axe z est donné par

$$H = \gamma\,\mathbf{S}.\mathbf{B}$$

   où est le facteur gyromagnétique.
   (a) Déterminer les valeurs propres et états propres correspondants.
   (b) Donner l'évolution temporelle de l'état d'une telle particule initialement dans l'état $|+\rangle_u$ et interpréter physiquement.

1. $J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|j, m \pm 1\rangle$

http ://quic.ulb.ac.be :
Evgueni.Karpov@ulb.ac.be, Christina.Giarmatzi@ulb.ac.be