Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°8 : Moment cinétique et spin 1/2

1. À partir des relations de commutation qui le définissent, montrer que tout moment cinétique satisfait la propriété étonnante suivante
$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L}.$$
2. On considére l'observable $\mathbf{S}$ associée à un moment cinétique $s = 1/2$ (spin). On note $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ la base à deux dimensions des états propres communs des opérateurs $\mathbf{S^2}$ et S_z. Dans cette base :
   (a) écrire la représentation matricielle de $\mathbf{S}^2$ et S_z :
   $\mathbf{S}^2 |s, m\rangle = \hbar\, s(s+1) |s, m\rangle$, $-s \leq m \leq s$,
   $\mathbf{S}_z |s, m\rangle = \hbar\, m\, |s, m\rangle$.
   (b) écrire la représentation matricielle des opérateurs échelle S_+ et S_- donnés par $S_\pm |s, m\rangle = \hbar\sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)}\, |s, m \pm 1\rangle$. En déduire la représentation matricielle de l'observable $\mathbf{S}$.
3. Spin d'orientation quelconque.
   (a) Rechercher les états propres communs à $\mathbf{S^2}$ et à $S_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}$ où $\mathbf{u}$ est un vecteur unité d'orientation arbitraire (θ, φ).
   (b) Appelons ces vecteurs $|\uparrow\rangle_u$ et $|\downarrow\rangle_u$ et supposons que l'on ait préparé l'état $|\uparrow\rangle_u$. Analyser les mesures (résultats et probabilités) de
      i. S_z,
      ii. $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$,
      iii. S_z puis S_x.

   Commenter.
4. Précession de Larmor : le hamiltonien d'une particule de spin 1/2 dans un champ magnétique d'amplitude B uniforme orienté suivant l'axe z est donné par
$$H = \gamma\, \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$
   où est le facteur gyromagnétique.
   (a) Déterminer les valeurs propres et états propres correspondants.
   (b) Donner l'évolution temporelle de l'état d'une telle particule initialement dans l'état $|+\rangle_u$ et interpréter physiquement (l'état $|+\rangle_u$ est un état propre commun à $\mathbf{S}^2$ et à H qui correspond à la valeur propre positive).

---

http ://quic.ulb.ac.be
Evgueni.Karpov@ulb.ac.be, ahertz@ulb.ac.be