

Mécanique quantique I

Séance d'exercices n°8 : Moment cinétique et spin 1/2

1. À partir des relations de commutation qui le définissent, montrer que tout moment cinétique satisfait la propriété étonnante suivante

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L}.$$

2. Calculez le commutateur $[S^2, S_i]$ où $i = x, y, z$. Que pouvez-vous en conclure ?
3. On considère l'observable \mathbf{S} associée à un moment cinétique $s = 1/2$ (spin). Dans ce cas précis, S^2 et S_z forment un ECOC. On définit leurs valeurs propres et états propres ainsi :

$$\begin{aligned} S^2 |s, m\rangle &= \hbar^2 s(s+1) |s, m\rangle, & -s \leq m \leq s, \\ S_z |s, m\rangle &= \hbar m |s, m\rangle. \end{aligned}$$

On peut également définir les opérateurs échelle du spin S_+ et S_- qui ont pour action

$$S_{\pm} |s, m\rangle = \hbar \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)} |s, m \pm 1\rangle.$$

- (a) Écrire la représentation matricielle de S^2 et S_z .
- (b) Écrire la représentation matricielle des opérateurs échelle S_+ et S_- . En déduire la représentation matricielle de l'observable S en utilisant les relations suivantes :

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} \quad S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

4. On note $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ la base des états propres communs des opérateurs S^2 et S_z .
- (a) Rechercher les états propres communs à S^2 et à $S_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}$ où \mathbf{u} est un vecteur unité d'orientation arbitraire (θ, φ) .
- (b) Appelons ces vecteurs $|\uparrow\rangle_u$ et $|\downarrow\rangle_u$ et supposons que l'on ait préparé l'état $|\uparrow\rangle_u$. Analyser les mesures (résultats et probabilités) de
- i. S_z ,
 - ii. $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$,
 - iii. S_z puis S_x .
5. Précession de Larmor : l'hamiltonien d'une particule de spin 1/2 dans un champ magnétique d'amplitude B uniforme orienté suivant l'axe z est donné par

$$H = \gamma \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

où γ est le rapport gyromagnétique.

- (a) Déterminer les valeurs propres et états propres correspondants.
- (b) Donner l'évolution temporelle de l'état d'une telle particule initialement dans l'état $|\uparrow\rangle_u$ et interpréter physiquement (l'état $|\uparrow\rangle_u$ est un état propre commun à S^2 et à H qui correspond à la valeur propre positive).