Mécanique Quantique I

Séance d'exercices n° 8 | Moment cinétique et spin 1/2

1. $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$

$[L_y, L_z] = i\hbar L_x$

$[L_z, L_x] = i\hbar L_x$

$$\vec{L}\times\vec{L} = \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ L_x & L_y & L_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix} = [L_y, L_z]1_x + [L_z, L_x]1_y + [L_x, L_y]1_z = i\hbar \vec{L}$$

2. $s = 1/2 \quad \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

a)
En générale : moment cinétique J

$$J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \quad , J_z|j,m\rangle = \hbar m\,|j,m\rangle$$

$$-j \leq m \leq j$$

Dans le cas de l'observable S, $j = 1/2$

$$S^2|1/2,m\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|1/2,m\rangle \qquad \Big| \quad -\frac{1}{2}\leq m \leq \frac{1}{2}$$
$$S_z|1/2,m\rangle = \hbar m\,|1/2,m\rangle$$

$S_z|1/2,1/2\rangle = \frac{1}{2}\hbar|1/2,1/2\rangle$

$S_z|1/2,-1/2\rangle = \frac{1}{2}\hbar|1/2,-1/2\rangle$

$|1/2,1/2\rangle \equiv |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$|1/2,-1/2\rangle \equiv |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$S_z|\uparrow\rangle = \hbar/2\,|\uparrow\rangle \quad , \quad S_z|\downarrow\rangle = -\hbar/2\,|\downarrow\rangle$

$S_z\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow S_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & ?\end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}$

$S_z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow S_z = \begin{pmatrix}? & 0\\? & -1\end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}$

$\Rightarrow S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

$S^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow S^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & ?\end{pmatrix}3/4\,\hbar^2$

$S^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow S^2 = \begin{pmatrix}? & 0\\? & 1\end{pmatrix}\frac{3}{4}\hbar^2$

$\Rightarrow S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

Mécanique Quantique I

Séance 8

2. b) $J_\pm |j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|j,m\pm 1\rangle$

$$S_\pm = S_x \pm i S_y$$

$S_+|s,m\rangle = \hbar\sqrt{(s-m)(s+m+1)}\,|s,m+1\rangle$

$S_+|\uparrow\rangle = \hbar\cdot 0\,|\uparrow+1\rangle = 0 \qquad (|\uparrow+1\rangle = |1/2, 1/2+1\rangle)$

$S_+|\downarrow\rangle = \hbar\,|\uparrow\rangle \qquad (|\downarrow+1\rangle = |1/2, -1/2+1\rangle = |\uparrow\rangle)$

$|\uparrow+1\rangle = 0$ car cette état n'existe pas

$$\left.\begin{array}{l} S_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow S_+ = \begin{pmatrix}0 & ?\\0 & ?\end{pmatrix} \\ S_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\hbar \Rightarrow S_+ = \begin{pmatrix}? & 1\\? & 0\end{pmatrix}\hbar \end{array}\right\} \Rightarrow S_+ = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\hbar$$

$S_-|s,m\rangle = \hbar\sqrt{(s+m)(s-m+1)}\,|s,m-1\rangle$

$$\left.\begin{array}{l} S_-|\uparrow\rangle = \hbar\,|\downarrow\rangle \Rightarrow S_-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow S_- = \begin{pmatrix}0 & ?\\1 & ?\end{pmatrix}\hbar \\ S_-|\downarrow\rangle = 0 \Rightarrow S_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow S_- = \begin{pmatrix}? & 0\\? & 0\end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow S_- = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} \qquad S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

PAULI $\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

$$S = \frac{\hbar}{2}\left(\sigma_x \mathbb{1}_x + \sigma_y \mathbb{1}_y + \sigma_z \mathbb{1}_z\right)$$

avec $\mathbb{I} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

Ils forment une base orthonormée de l'espace complexe de Hilbert des matrices 2x2.

Mécanique Quantique I
Séance 8

Exercice 3

a) $u = \rho \sin\theta \cos\varphi \, 1_x + \rho \sin\theta \sin\varphi \, 1_y + \rho \cos\theta \, 1_z$

u : vecteur unité $\Rightarrow \rho = 1$

$$S_u = \vec{u}\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\left[\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right.$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

Pour les valeurs propres

$$\det(S_u - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}\frac{\hbar}{2}\cos\theta - \lambda & \frac{\hbar}{2}\sin\theta e^{-i\varphi}\\ \frac{\hbar}{2}\sin\theta e^{i\varphi} & -\frac{\hbar}{2}\cos\theta - \lambda\end{vmatrix} = \left(\frac{\hbar}{2}\cos\theta - \lambda\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\cos\theta - \lambda\right) - \left(\frac{\hbar}{2}\sin\theta e^{i\varphi}\right)\left(\frac{\hbar}{2}\sin\theta e^{-i\varphi}\right)$$

$$= \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4}\cos^2\theta - \frac{\hbar^2}{4}\sin^2\theta = \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

Pour $\lambda = \frac{\hbar}{2}$

$$S_u\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} a\cos\theta + b\sin\theta e^{-i\varphi} = a & \rightarrow (A)\\ a\sin\theta e^{i\varphi} - b\cos\theta = b & \rightarrow (B)\end{cases}$$

(A) $\Rightarrow \{ \; a\cos\theta + b\sin\theta e^{-i\varphi} = a \Rightarrow b\sin\theta e^{-i\varphi} = a(1-\cos\theta)$

$$\Rightarrow b = a\frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta}e^{i\varphi} \quad , \sin\theta \neq 0, \; \theta \neq k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$

(B) $\Rightarrow a\sin\theta e^{i\varphi} - b\cos\theta = b \Rightarrow$

$a\sin\theta e^{i\varphi} = b(1+\cos\theta) \Rightarrow$

$$a\sin\theta e^{i\varphi} \overset{(A)}{=} a\frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta}e^{i\varphi}(1+\cos\theta)$$

$$a\sin^2\theta = a(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) = a(1-\cos^2\theta) \Rightarrow a = a$$

$\Rightarrow$ on peut choisir n'importe quel a.

Pour le cas $\sin\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases}\cos\theta = 1 , & \theta = 2k\pi & (1)\\ \cos\theta = -1 , & \theta = \pi + 2k\pi & (2)\end{cases}$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} a = +a\\ b = -b\end{cases} \Rightarrow b = 0 \quad \text{pour } \theta = 2k\pi$$

Mécanique Quantique I
Séance 8

Exercice 3 (cont.)

a) ...

(2) $\Rightarrow \begin{cases} -a = a \\ b = b \end{cases} \Rightarrow a = 0 \quad , \theta = \pi + 2k\pi$

Alors $b = 0 \quad , \theta = 2k\pi$
$a = 0 \quad , \theta = \pi + 2k\pi$

Donc on peut prendre comme vecteur propre $|\uparrow\rangle_u = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \, e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

De même, pour le cas $\lambda = -\frac{\hbar}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} a\cos\theta + b\sin\theta e^{-i\varphi} = -a \\ a\sin\theta e^{i\varphi} - b\cos\theta = -b \end{array}\right\} \quad b = -a\,\frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta} e^{i\varphi}$$

- pour $\sin\theta \neq 0 \Rightarrow \theta \neq k\pi \,, k \in \mathbb{N}$

$$a\sin\theta e^{i\varphi} - b\cos\theta = -b \Rightarrow \dots \Rightarrow a = a$$

Finalement : $a = 0 \,, \quad \theta = 2k\pi$
$b = 0 \,, \quad \theta = \pi + 2k\pi$

Donc $|\downarrow\rangle_u = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

Les états $|\uparrow\rangle_u$ et $|\downarrow\rangle_u$ sont aussi états propres de S^2

La relation entre les bases $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ et $\{|\uparrow\rangle_u, |\downarrow\rangle_u\}$:

$$|\uparrow\rangle_u = \cos(\theta/2)\,|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}\,|\downarrow\rangle$$

$$|\downarrow\rangle_u = \sin(\theta/2)|\uparrow\rangle - \cos(\theta/2)e^{i\varphi}\,|\downarrow\rangle$$

Le vecteur $|\uparrow\rangle_u$ est normé :

$${}_u\langle\uparrow|\uparrow\rangle_u = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2\, e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2\, e^{i\varphi} \end{pmatrix} = 1$$

Aussi pour le $|\downarrow\rangle_u$

$${}_u\langle\downarrow|\downarrow\rangle_u = 1$$

Aussi, la base est orthogonale, car :

$${}_u\langle\uparrow|\downarrow\rangle_u = 0$$

Mécanique Quantique I

Séance 8

Exercice 3 (cont.)

b)

i) $_u\langle\uparrow|S_z|\uparrow\rangle_u = (\cos\frac{\theta}{2}\langle\uparrow| + \sin\theta/_2\, e^{-i\varphi}\langle\downarrow|)\frac{\hbar}{2}\cdot$
$(\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi}|\downarrow\rangle)$

$= \frac{\hbar}{2}(\cos^2\frac{\theta}{2}\langle\uparrow|\uparrow\rangle - \sin^2\frac{\theta}{2}\langle\downarrow|\downarrow\rangle)$

$= \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}\left(\cos 2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$

$_u\langle\uparrow|S_z|\uparrow\rangle_u = \frac{\hbar}{2}u_z$

La probabilité associée à cette mesure

$\|_u\langle\uparrow|S_z|\uparrow\rangle_u\|^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 u_z^2$

ii)

$_u\langle\uparrow|S_x|\uparrow\rangle_u = (\cos\frac{\theta}{2})\langle\uparrow| + \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\langle\downarrow|)\, S_x$
$((\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|\downarrow\rangle)$

On sait que $S_x = \frac{S_+ + S_-}{2}$

$\Rightarrow {}_u\langle\uparrow|S_x|\uparrow\rangle_u = (\cos\frac{\theta}{2}\langle\uparrow| + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\langle\downarrow|)\left(\frac{S_+ + S_-}{2}\right)(\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|\downarrow\rangle)$

On sait que $S_+|\uparrow\rangle = 0$, $S_-|\uparrow\rangle = \hbar|\downarrow\rangle$
$S_+|\downarrow\rangle = \hbar|\uparrow\rangle$, $S_+|\uparrow\rangle = 0$

$\Rightarrow {}_u\langle\uparrow|S_x|\uparrow\rangle_u = \frac{1}{2}(\cos\frac{\theta}{2}\langle\uparrow| + \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\langle\downarrow|)\, S_+\left(\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|\downarrow\rangle\right)$

$+ \frac{1}{2}(\cos\frac{\theta}{2}\langle\uparrow| + \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\langle\downarrow|)\, S_-\left(\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|\downarrow\rangle\right)$

$= \frac{1}{2}(\cos\frac{\theta}{2}\langle\uparrow| + \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\langle\downarrow|)\,\hbar\,(\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|\uparrow\rangle)$

$+ \frac{1}{2}(\cos\frac{\theta}{2}\langle\uparrow| + \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\langle\downarrow|)\,\hbar\,(\cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle)$

$= \frac{\hbar}{2}(\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi})$

$= \frac{\hbar}{2}\left(\frac{\sin\theta}{2}e^{i\varphi} + \frac{\sin\theta}{2}e^{-i\varphi}\right) = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)\sin\theta$

$= \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\theta$

Mecanique Quantique I ⑥

Séance 8

Exercice 3ii (cont.)

$$_u\langle\uparrow|S_x|\uparrow\rangle_u = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\varphi = \frac{\hbar}{2}u_x$$

La probabilité associé est :

$$\|_u\langle\uparrow|S_x|\uparrow\rangle_u\|^2 = \frac{\hbar^2}{4}u_x^2$$

iii) On applique l'operateur S_x à l'etat $S_z|\uparrow\rangle_u$

$$S_xS_z|\uparrow\rangle_u = \left(\frac{S_+ + S_-}{2}\right)\frac{\hbar}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle - \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|\downarrow\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left(\cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle - \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|\uparrow\rangle\right)$$

La valeur moyenne de l'opérateur S_xS_z pour l'etat $|\uparrow\rangle_u$:

$$_u\langle\uparrow|S_xS_z|\uparrow\rangle_u = \left(\cos\frac{\theta}{2}\langle\uparrow| + \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\langle\downarrow|\right)\frac{\hbar^2}{4}\cdot$$
$$\left(\cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle - \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|\uparrow\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left(-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left(-\frac{\sin\theta}{2}e^{i\varphi} + \frac{\sin\theta}{2}e^{-i\varphi}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\sin\theta\left(\frac{e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4}i\sin\theta\sin\varphi$$

$$= -i\frac{\hbar^2}{4}u_y$$

La probabilité associé est : $\|_u\langle\uparrow|S_xS_z|\uparrow\rangle_u\| = \left(\frac{\hbar^2}{4}\right)^2\cdot u_y^2$

Les resultats
$$_u\langle\uparrow|S_z|\uparrow\rangle_u = \frac{\hbar}{2}u_z$$
$$_u\langle\uparrow|S_x|\uparrow\rangle_u = \frac{\hbar}{2}u_x$$
$$_u\langle\uparrow|S_xS_z|\uparrow\rangle_u = -i\frac{\hbar^2}{4}u_y$$
montre qu'il est possible de mesure les differents composantes d'un vecteur $\vec{u}$ quelconque

Mécanique Quantique I

Séance 8

Exercice 4

$$H = \gamma \vec{S} \cdot \vec{B} \qquad \vec{B} = B_z \cdot \hat{z} = B$$

a) $H = \gamma \vec{S} \cdot \vec{B} = \gamma S_z B = \gamma B \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

on définit $\omega_L = \gamma B$ la pulsation de Larmor

Alors $H = \frac{\omega_L \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ω_L est une constante, alors les valeurs propres de H sont les valeurs propres de S_z, qui sont : $\pm \frac{\hbar}{2}$.

Les vecteurs propres correspondants sont $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

Ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de S^2 et S_z, donc l'ensemble $\{H, S^2, S_z\}$ forme un ensemble complet d'observable qui commutent (ECOC).

b) Supposons qu'on a un état normé $|\psi(t)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle$$

avec $|a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1$

L'évolution temporelle est donné par l'équation de Shrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \frac{\omega_L \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hbar a'(t) = \frac{\omega_L \hbar}{2} a(t) \\ i\hbar b'(t) = -\frac{\omega_L \hbar}{2} b(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = a_0 e^{-i\frac{\omega_L}{2}t} \\ b(t) = b_0 e^{i\frac{\omega_L}{2}t} \end{cases}$$

La particule est initialement dans l'état $|\uparrow\rangle_u$, alors :

$$|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |\downarrow\rangle$$

$a(t=0) = a_0$ Alors $a_0 = \cos\frac{\theta}{2}$

$b(t=0) = b_0$ $\qquad b_0 = \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$

Et $|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\omega_L}{2}t} |\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\omega_L}{2}t + \varphi)} |\downarrow\rangle$

$\Rightarrow$

Mécanique Quantique I

Séance 8

Exercice 1b (cont.)

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-\frac{i\omega_L t}{2}} |\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i\omega_L t}{2}} e^{i\varphi} |\downarrow\rangle$$

$$= e^{-\frac{i\omega_L t}{2}} \left(\cos\frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{2i\omega_L t}{2}} e^{i\varphi} |\downarrow\rangle \right)$$

$\hookrightarrow e^{-\frac{i\omega_L t}{2}}$ est une phase globale qu'on peut omettre

$$= \cos\frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi(t)} |\downarrow\rangle$$