Mécanique Quantique I

Séance d'exercises 9 - Information Quantique

Q1)

Pour n bits (classiques) il existe 2^n différentes combinaison = états possibles pour un système classique

Q2)

Opérateur unitaire $U = e^{iH}$ ← opérateur hermitien, $H = H^\dagger$,

M états possible

⇒ matrice $M \times M$ correspondant à un op. hermitien :

$$H_{M\times M} = \begin{pmatrix} h_{11} & \overbrace{h_{12} & h_{13} & \cdots & h_{1M}}^{M-1} \\ h_{12}^* & h_{22} & \overbrace{h_{23} & \cdots & h_{2M}}^{M-2} \\ h_{13}^* & h_{23}^* & h_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ h_{1M}^* & & & & h_{MM} \end{pmatrix}$$

paramètres réels:

para sur la diagonale ; # para complex première ligne ⇒ 2(M-1) para réels

$$\# = M + 2(M-1) + 2(M-2) + \cdots + 2$$

$$= M + 2\sum_{k=1}^{M-1} k = M + 2\frac{(M-1)(M-1+1)}{2}$$

$$= M + (M-1)M = M + M^2 - M = \underline{\underline{M^2}}$$

Q3) No-cloning (cas général)

Déf : $U|\varphi\rangle|k\rangle = |\varphi\rangle|\varphi\rangle$, $|k\rangle$ ≙ "feuille blanche", état normé

$U|\psi\rangle|k\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle$,

Produit scalaire de chaque côté :

$$\langle k|\langle\varphi|\underbrace{U^\dagger U}_{=I}|\psi\rangle|k\rangle = \langle\varphi|\langle\varphi|\psi\rangle|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle\varphi|\psi\rangle\underbrace{\langle k|k\rangle}_{=1,\text{ normalisation}} = \langle\varphi|\psi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{soit } \langle\varphi|\psi\rangle = 0 \Rightarrow |\varphi\rangle \perp |\psi\rangle \\ \text{soit } \langle\varphi|\psi\rangle = 1 \Rightarrow |\varphi\rangle = |\psi\rangle\end{array}}$$

⇒ En général le "clonage" n'est pas possible !

Q4)

Prouvez que les états de Bell forment une base

$\Rightarrow$ prouvez qu'ils sont tous orthogonaux entre eux :

$$\langle \Phi^- | \Phi^+ \rangle = \frac{1}{2}\left(-\langle 1|\langle 1| + \langle 0|\langle 0|\right)\left(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(-\langle 1|\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{=0}|0\rangle - \langle 1|\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{=1}|1\rangle + \langle 0|\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{=1}|0\rangle$$

$$+ \langle 0|\underbrace{\langle 0|1\rangle}_{=0}|1\rangle \Big) = \frac{1}{2}(-1+1) = \underline{\underline{0}}$$

$$\langle \Psi^+ | \Phi^+ \rangle = \frac{1}{2}\left(\langle 0|\langle 1| + \langle 1|\langle 0|\right)\left(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\langle 0|\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{=0}|0\rangle + \overbrace{\langle 0|\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{=1}|1\rangle}^{=0} + \overbrace{\langle 1|\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{=1}|0\rangle}^{=0}$$

$$+ \langle 1|\underbrace{\langle 0|1\rangle}_{=0}|1\rangle \Big) = \underline{\underline{0}}$$

etc...

Q5)

Triplet: $|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle$
$(S=1)$

Singlet: $|\Psi^-\rangle$
$(S=0)$

détails
$\Rightarrow$ voir Schwabl "Quantum Mechanics" Chap. 10.2

accès online dans le réseau ULB sur :

http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71933-5/

Q6) : voir calcul sur les prochaines pages

Q6) : Calcul téléportation quantique

$$
\begin{aligned}
& |\phi\rangle_{A'} |\Phi^+\rangle_{AB} \\
= \; & (\alpha |0\rangle_{A'} + \beta |1\rangle_{A'}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B) \\
= \; & \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{A'}} |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{A}} |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{B}} + \alpha |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{A'}} |\mathbf{1}\rangle_{\mathbf{A}} |\mathbf{1}\rangle_{\mathbf{B}} + \beta |\mathbf{1}\rangle_{\mathbf{A'}} |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{A}} |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{B}} + \beta |\mathbf{1}\rangle_{\mathbf{A'}} |\mathbf{1}\rangle_{\mathbf{A}} |\mathbf{1}\rangle_{\mathbf{B}}) \\
= \; & \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{A'}} |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{A}} |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{B}} + \alpha |1\rangle_{A'} |1\rangle_A |0\rangle_B - \alpha |1\rangle_{A'} |1\rangle_A |0\rangle_B \\
& + \alpha |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{A'}} |\mathbf{1}\rangle_{\mathbf{A}} |\mathbf{1}\rangle_{\mathbf{B}} + \alpha |1\rangle_{A'} |0\rangle_A |1\rangle_B - \alpha |1\rangle_{A'} |0\rangle_A |1\rangle_B \\
& + \beta |\mathbf{1}\rangle_{\mathbf{A'}} |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{A}} |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{B}} + \beta |0\rangle_{A'} |1\rangle_A |0\rangle_B - \beta |0\rangle_{A'} |1\rangle_A |0\rangle_B \\
& + \beta |\mathbf{1}\rangle_{\mathbf{A'}} |\mathbf{1}\rangle_{\mathbf{A}} |\mathbf{1}\rangle_{\mathbf{B}} + \beta |0\rangle_{A'} |0\rangle_A |1\rangle_B - \beta |0\rangle_{A'} |0\rangle_A |1\rangle_B) \\
= \; & \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle_{A'} |0\rangle_A + |1\rangle_{A'} |1\rangle_A) \alpha |0\rangle_B - \alpha |1\rangle_{A'} |1\rangle_A |0\rangle_B + \alpha |0\rangle_{A'} |0\rangle_A |0\rangle_B - \alpha |0\rangle_{A'} |0\rangle_A |0\rangle_B \\
& + (|0\rangle_{A'} |1\rangle_A + |1\rangle_{A'} |0\rangle_A) \alpha |1\rangle_B - \alpha |1\rangle_{A'} |0\rangle_A |1\rangle_B + \alpha |0\rangle_{A'} |1\rangle_A |1\rangle_B - \alpha |0\rangle_{A'} |1\rangle_A |1\rangle_B \\
& + (|1\rangle_{A'} |0\rangle_A + |0\rangle_{A'} |1\rangle_A) \beta |0\rangle_B - \beta |0\rangle_{A'} |1\rangle_A |0\rangle_B + \beta |1\rangle_{A'} |0\rangle_A |0\rangle_B - \beta |1\rangle_{A'} |0\rangle_A |0\rangle_B \\
& + (|1\rangle_{A'} |1\rangle_A + |0\rangle_{A'} |0\rangle_A) \beta |1\rangle_B) - \beta |0\rangle_{A'} |0\rangle_A |1\rangle_B + \beta |1\rangle_{A'} |1\rangle_A |1\rangle_B - \beta |1\rangle_{A'} |1\rangle_A |1\rangle_B] \\
= \; & |\Phi^+\rangle_{A'A} \alpha |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}} ((|0\rangle_{A'} |0\rangle_A - |1\rangle_{A'} |1\rangle_A) \alpha |0\rangle_B - \alpha |0\rangle_{A'} |0\rangle_A |0\rangle_B) \\
& + |\Psi^+\rangle_{A'A} \alpha |1\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}} ((|1\rangle_{A'} |0\rangle_A - |0\rangle_{A'} |1\rangle_A) \alpha |1\rangle_B + \alpha |0\rangle_{A'} |1\rangle_A |1\rangle_B) \\
& + |\Psi^+\rangle_{A'A} \beta |0\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}} ((|0\rangle_{A'} |1\rangle_A - |1\rangle_{A'} |0\rangle_A) \beta |0\rangle_B + \beta |1\rangle_{A'} |0\rangle_A |0\rangle_B) \\
& + |\Phi^+\rangle_{A'A} \beta |1\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}} ((|0\rangle_{A'} |0\rangle_A - |1\rangle_{A'} |1\rangle_A) \beta |1\rangle_B - \beta |1\rangle_{A'} |1\rangle_A |1\rangle_B) \\
= \; & |\Phi^+\rangle_{A'A} (\alpha |0\rangle_B + \beta |1\rangle_B) + |\Psi^+\rangle_{A'A} (\alpha |1\rangle_B + \beta |0\rangle_B) \\
& + |\Phi^-\rangle_{A'A} (\alpha |0\rangle_B - \beta |1\rangle_B) - |\Psi^-\rangle_{A'A} (\beta |0\rangle_B - \alpha |1\rangle_B) \\
& \underbrace{- \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |0\rangle_{A'} |0\rangle_A |0\rangle_B + \alpha |0\rangle_{A'} |1\rangle_A |1\rangle_B + \beta |1\rangle_{A'} |0\rangle_A |0\rangle_B + \beta |1\rangle_{A'} |1\rangle_A |1\rangle_B)}_{= -|\phi\rangle_{A'} |\Phi^+\rangle_{AB}}
\end{aligned}
$$

On obtien donc

$$
\begin{aligned}
2 |\phi\rangle_{A'} |\Phi^+\rangle_{AB} = \quad & |\Phi^+\rangle_{A'A} (\alpha |0\rangle_B + \beta |1\rangle_B) + |\Psi^+\rangle_{A'A} (\alpha |1\rangle_B + \beta |0\rangle_B) \\
& + |\Phi^-\rangle_{A'A} (\alpha |0\rangle_B - \beta |1\rangle_B) - |\Psi^-\rangle_{A'A} (\beta |0\rangle_B - \alpha |1\rangle_B),
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$
\begin{aligned}
|\phi\rangle_{A'} |\Phi^+\rangle_{AB} \; = \; & \frac{1}{2} (|\Phi^+\rangle_{A'A} (\alpha |0\rangle_B + \beta |1\rangle_B) \\
& + |\Psi^+\rangle_{A'A} (\alpha |1\rangle_B + \beta |0\rangle_B) \\
& + |\Phi^-\rangle_{A'A} (\alpha |0\rangle_B - \beta |1\rangle_B) \\
& - |\Psi^-\rangle_{A'A} (\beta |0\rangle_B - \alpha |1\rangle_B)).
\end{aligned}
$$

(Q7): L'inégalité de Bell

(Cas classique):

$Q=\pm 1,\ R=\pm 1,\ S=\pm 1,\ T=\pm 1$

a) $QS+RS+RT-QT =: a$

Calculer:
$$\left.\begin{array}{l} Q=S=R=T=1 \Rightarrow a=2 \\ Q=S=R=1, T=-1 \Rightarrow a=2 \\ \vdots \\ Q=1, S=R=T=-1 \Rightarrow a=2 \\ Q=S=R=T=-1 \Rightarrow a=-2 \end{array}\right\} a=\pm 2$$

$$E(QS+RS+RT-QT) = \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t)\underbrace{(qs+rs+rt-qt)}_{\leq 2}$$

$$\leq \underbrace{\sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t)}_{=1\ (\text{normalisation})}\cdot 2 = 2$$

linéarité: $E(QS+RS+RT-QT) = E(QS)+E(RS)+E(RT)-E(QT) \leq 2$

(Cas quantique) b)

$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, (notation: $|01\rangle = |0\rangle|1\rangle = |0\rangle\otimes|1\rangle$)

$\hat{Q}=Z_1,\ \hat{S}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-Z_2-X_2),\ \hat{R}=X_1,\ \hat{T}=\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_2-X_2)$

$X_1=\sigma_x\otimes\mathbb{1},\ X_2=\mathbb{1}\otimes\sigma_x,\ Z_1=\sigma_z\otimes\mathbb{1},\ Z_2=\mathbb{1}\otimes\sigma_z$

$$\langle\psi^-|\hat{Q}\hat{S}|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}(+\langle 01|+\langle 10|)(\sigma_z\otimes\mathbb{1})(-\mathbb{1}\otimes\sigma_z-\mathbb{1}\otimes\sigma_x)(|01\rangle-|10\rangle)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}(+\langle 01|+\langle 10|)(+|01\rangle+|10\rangle-|00\rangle+|11\rangle)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}(+\overbrace{\langle 01|01\rangle}^{=0}+\overbrace{\langle 01|10\rangle}^{=1}-\overbrace{\langle 01|00\rangle}^{=0}+\overbrace{\langle 01|11\rangle}^{=0}+\overbrace{\langle 10|01\rangle}^{=1}+\overbrace{\langle 10|10\rangle}^{=0}$$

$$+\underbrace{\langle 10|00\rangle}_{=0}+\underbrace{\langle 10|11\rangle}_{=0}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\langle \psi^- | RS | \psi^- \rangle$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(-\langle 01| + \langle 10|\big)\big(\sigma_x \otimes \mathbb{1}\big)\big(-\mathbb{1}\otimes\sigma_z - \mathbb{1}\otimes\sigma_x\big)\big(|01\rangle - |10\rangle\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(-\langle 00| + \langle 11|\big)\big(|01\rangle + |10\rangle - |00\rangle + |11\rangle\big)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(0+0+1+0+0+0+0+1\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\langle \psi^- | RT | \psi^- \rangle$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(-\langle 01| + \langle 10|\big)\big(\big(\sigma_x \otimes \mathbb{1}\big)\big(\mathbb{1}\otimes\sigma_z - \mathbb{1}\otimes\sigma_x\big)\big(|01\rangle - |10\rangle\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(-\langle 00| + \langle 11|\big)\big(-|01\rangle - |10\rangle - |00\rangle + |11\rangle\big)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(0+0+1+0+0+0+0+1\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\langle \psi^- | QT | \psi^- \rangle$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(-\langle 01| + \langle 10|\big)\Big(\big(\sigma_z \otimes \mathbb{1}\big)\big(\mathbb{1}\otimes\sigma_z - \mathbb{1}\otimes\sigma_x\big)\big(|01\rangle - |10\rangle\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(+\langle 01| + \langle 10|\big)\big(-|01\rangle - |10\rangle - |00\rangle + |11\rangle\big)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(0-1+0+0-1+0+0+0\big) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \langle \psi^- | \hat{Q}\hat{S} | \psi^- \rangle + \langle \psi^- | \hat{R}\hat{S} | \psi^- \rangle + \langle \psi^- | \hat{R}\hat{T} | \psi^- \rangle - \langle \psi^- | \hat{Q}\hat{T} | \psi^- \rangle = 2\sqrt{2}$$

$$\geq 2 \;!$$

Q7) : ("L'inégalité de Bell") Conclusion :

En conclusion, bien que chacune des observables Q, R, S, T corresponde à une grandeur physique mesurable, on ne peut pas supposer que toutes ces grandeurs physiques aient une valeur simultanée prédéfinie avant qu'elles ne soient mesurées (hypothèse de "réalisme local"), car cela impliquerait que les résultats de mesure soient en accord avec une distribution de probabilité jointe $p(q, r, s, t)$. En effet, nous venons de montrer que l'existence d'une telle distribution de probabilité jointe implique une borne supérieure sur l'espérance $E(QS + RS + RT - QT)$, or le système quantique étudié viole cette borne.

On doit donc en conclure que les grandeurs physiques correspondant aux observables Q, R, S, T n'ont pas de valeur définie avant leur mesure, et que leur valeur n'est fixée qu'une fois la mesure réalisée. La conséquence étonnante de l'intrication est qu'en observant un résultat de mesure sur la particule d'Alice, on fixe non seulement la valeur de cette grandeur physique, mais aussi la valeur d'une grandeur physique correspondante pour la particule de Bob, et ceci de manière instantanée, quelle que soit la distance entre ces particules, c'est le fameux paradoxe EPR [1]. Néanmoins, cet effet à distance, appelé "non-localité" quantique, ne permet pas de communiquer instantanément et donc ne viole pas la relativité : en effet, Bob ne connaît pas le résultat de la mesure d'Alice. Donc, de son point de vue rien n'a changé, ce qui résout le paradoxe.

Références

[1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete ? Physical Review **47**, 777-780. http ://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777