

Mécanique Quantique 1 — CORRIGÉ

Séance d'exercices 9 : Composition de moments cinétique

Exercice 1

Calculons d'abord les relations de commutations des moments cinétiques :

$$[J_x, J_y] = [J_{x_1} + J_{x_2}, J_{y_1} + J_{y_2}] = [J_{x_1}, J_{y_1}] + [J_{x_2}, J_{y_2}] = i\hbar J_{z_1} + i\hbar J_{z_2} = i\hbar J_z$$

où on a utilisé le fait que toutes les composantes de \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 commutent entre elles puisqu'elles n'appartiennent pas au même espace.

De la même façon,

$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

On peut maintenant calculer le produit vectoriel de \mathbf{J} avec lui-même :

$$\mathbf{J} \times \mathbf{J} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ J_x & J_y & J_z \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix} = \hat{i}[J_y, J_z] - \hat{j}[J_x, J_z] + \hat{k}[J_x, J_y] = \hat{i}i\hbar J_x - \hat{j}(-i\hbar J_y) + \hat{k}i\hbar J_z = i\hbar \mathbf{J}$$

Pour montrer ensuite que $\{J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$ forment un ECOOC, il faut montrer que tous ces opérateurs commutent entre eux.

Il est trivial que J_1^2 et J_2^2 commutent puisqu'ils n'appartiennent pas au même sous-espace. Il faut cependant vérifier les autres relations. Pour calculer, on utilise le fait que

$$J^2 = J_1^2 + 2\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + J_2^2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} [J^2, J_1^2] &= [J_1^2 + 2J_1 J_2 + J_2^2, J_1^2] \\ &= [J_1^2, J_1^2] + 2[J_1 J_2, J_1^2] + [J_2^2, J_1^2] \\ &= 0 + 2J_1[J_2, J_1^2] + 2[J_1, J_1^2]J_2 + 0 \\ &= 0 \\ [J^2, J_2^2] &= [J_1^2 + 2J_1 J_2 + J_2^2, J_2^2] \\ &= [J_1^2, J_2^2] + 2[J_1 J_2, J_2^2] + [J_2^2, J_2^2] \\ &= 0 + 2J_1[J_2, J_2^2] + 2[J_1, J_2^2]J_2 + 0 \\ &= 0 \\ [J_1^2, J_z] &= [J_{x_1}^2 + J_{y_1}^2 + J_{z_1}^2, J_{z_1} + J_{z_2}] \\ &= 0 \\ [J_2^2, J_z] &= [J_{x_2}^2 + J_{y_2}^2 + J_{z_2}^2, J_{z_1} + J_{z_2}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

et, en utilisant les résultats ci-dessus

$$\begin{aligned}
[J^2, J_z] &= [J_1^2 + 2J_1J_2 + J_2^2, J_z] \\
&= [J_1^2, J_z] + 2[J_1J_2, J_z] + [J_2^2, J_z] \\
&= 0 + 2[J_{x_1}J_{x_2} + J_{y_1}J_{y_2} + J_{z_1}J_{z_2}, J_{z_1} + J_{z_2}] \\
&= 2 \left(J_{x_1}[J_{x_2}, J_{z_1}] + [J_{x_1}, J_{z_1}]J_{x_2} + J_{x_1}[J_{x_2}, J_{z_2}] + [J_{x_1}, J_{z_2}]J_{x_2} \right. \\
&\quad \left. + J_{y_1}[J_{y_2}, J_{z_1}] + [J_{y_1}, J_{z_1}]J_{y_2} + J_{y_1}[J_{y_2}, J_{z_2}] + [J_{y_1}, J_{z_2}]J_{y_2} \right) \\
&= 2 \left(0 - i\hbar J_{y_1}J_{x_2} - i\hbar J_{x_1}J_{y_2} + 0 + 0 + i\hbar J_{x_1}J_{y_2} + i\hbar J_{y_1}J_{x_2} + 0 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, tous les opérateurs commutent entre eux et ils forment bien un ECOOC.

Exercice 2

(a) Pour donner les résultats possible, il suffit d'utiliser l'inégalité

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

et de se rappeler que $j_1 + j_2 + j$ doit être entier. Ainsi,

- i. $J = 1 \oplus 1 \Rightarrow 0 \leq J \leq 2 \Rightarrow J \in \{0, 1, 2\}$.
- ii. $J = 3/2 \oplus 5 \Rightarrow 7/2 \leq J \leq 13/2 \Rightarrow J \in \{7/2, 9/2, 11/2, 13/2\}$.
- iii. $J = 3/2 \oplus 5/2 \Rightarrow 1 \leq J \leq 4 \Rightarrow J \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- iv. $J = 0 \oplus 4 \Rightarrow 4 \leq J \leq 4 \Rightarrow J = 4$.
- v. $J = 5/2 \oplus 5/2 \Rightarrow 0 \leq J \leq 5 \Rightarrow J \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(b) Pour vérifier les relations triangulaires, on utilise la mêmes inégalité

- i. $j_1 = 3, j_2 = 5 \Rightarrow 2 \leq j \leq 8$. Or $j = 1 < 2 \Rightarrow$ NON.
- ii. $j_1 = 0, j_2 = 4 \Rightarrow 4 \leq j \leq 4$. $j = 4$ est dans l'intervalle \Rightarrow OUI.
- iii. $j_1 = 3/2, j_2 = 3/2 \Rightarrow 0 \leq j \leq 3$. $j = 3/2$ est bien dans l'intervalle, mais mais $j_1 + j_2 + j = 3/2 + 3/2 + 3/2 = 9/2$ n'est pas un entier \Rightarrow NON.
- iv. $j_1 = 5/2, j_2 = 2 \Rightarrow 1/2 \leq j \leq 9/2$. $j = 1/2$ est bien dans l'intervalle et $j_1 + j_2 + j = 5/2 + 2 + 1/2 = 5$ est un entier \Rightarrow OUI.
- v. $j_1 = 3, j_2 = 3/2 \Rightarrow 3/2 \leq j \leq 9/2$. Or $j = 1/2 < 3/2 \Rightarrow$ NON

(c) Encore une fois on vérifie que l'égalité $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ est bien vérifiée et on se rappelle que de façon équivalente, on peut vérifier

$$|j - j_2| \leq j_1 \leq j + j_2 \quad \text{ou} \quad |j - j_1| \leq j_2 \leq j + j_1$$

- i. $j = 2 \leq j \leq 5 \Rightarrow j \in \{2, 3, 4, 5\}$.
- ii. $j = 1 \leq j \leq 5 \Rightarrow j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- iii. $j = 5/2 \leq j \leq 9/2 \Rightarrow j \in \{5/2, 7/2, 9/2\}$.
- iv. $j = 5/2 \leq j \leq 5/2 \Rightarrow j = 5/2$.
- v. $j = 6 \leq j \leq 6 \Rightarrow j = 6$.

Exercice 3

- (a) Pour résoudre cet exercice on va d'abord écrire la représentation matricielle de \mathbf{J}^2 dans la base découplée $|lm_l sm_s\rangle$. On va ensuite diagonaliser cette matrice pour trouver les vecteurs propres que l'on nommera $|JM\rangle$. Ces vecteurs formeront la base couplée.

Dans la base découplée, l'action des différents opérateurs sur les état $|lm'_l sm'_s\rangle$ est donnée par les formule suivante. Notez que pour simplifier le problème, on pose $\hbar = 1$. On utilise également le fait que $s = 1/2$.

$$\begin{aligned} L_z |lm_l\rangle &= m_l |lm_l\rangle, \\ \mathbf{L}^2 |lm_l\rangle &= l(l+1) |lm_l\rangle \\ L_{\pm} |lm_l\rangle &= \sqrt{l(l+1) - m_l(m_l \pm 1)} |l, m_l \pm 1\rangle \\ S_z |sm_s\rangle &= m_s |sm_s\rangle, \\ \mathbf{S}^2 |sm_s\rangle &= \frac{3}{4} |sm_s\rangle \\ S_{\pm} |sm_s\rangle &= \sqrt{3/4 - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle \end{aligned}$$

Revenons maintenant à \mathbf{J}^2 que l'on veut exprimer premièrement sous forme de matrice dans la base découplée. Pour ce faire, on exprime \mathbf{J}^2 ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2, \\ &= \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}, \\ &= \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2(L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z), \end{aligned}$$

car \mathbf{L} et \mathbf{S} commutent. En utilisant les opérateurs d'échelle on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2 \left(\frac{L_+ + L_-}{2} \frac{S_+ + S_-}{2} + \frac{L_+ - L_-}{2i} \frac{S_+ - S_-}{2i} + L_z S_z \right) \\ &= \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z + \frac{1}{2} (L_+ S_+ + L_+ S_- + L_- S_+ + L_- S_-) \\ &\quad - \frac{1}{2} (L_+ S_+ - L_+ S_- - L_- S_+ + L_- S_-) \\ &= \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z + L_+ S_- + L_- S_+. \end{aligned}$$

L'avantage de cette méthode est que l'on connaît l'action des différents opérateurs sur la états de la base découplée et on peut donc facilement calculer les éléments de matrice de \mathbf{J}^2 donnés par

$$\langle lm_l sm_s | \mathbf{J}^2 | lm'_l sm'_s \rangle = \langle lm_l sm_s | \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z + L_+ S_- + L_- S_+ | lm'_l sm'_s \rangle,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \langle lm_l sm_s | \mathbf{J}^2 | lm'_l sm'_s \rangle &= \langle lm_l sm_s | \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z | lm'_l sm'_s \rangle + \langle lm_l sm_s | L_+ S_- | lm'_l sm'_s \rangle \\ &\quad + \langle lm_l sm_s | L_- S_+ | lm'_l sm'_s \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Le premier terme de (1) est facile à calculer et vaut

$$\langle lm_l sm_s | \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z | lm'_l sm'_s \rangle = \left(l(l+1) + \frac{3}{4} + 2m'_l m'_s \right) \langle lm_l sm_s | lm'_l sm'_s \rangle.$$

Comme les états $|lm_l\rangle \otimes |sm_s\rangle$ forment une base, ils sont orthonormés, et on a donc

$$\langle lm_l sm_s | \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z | lm'_l sm'_s \rangle = \left(l(l+1) + \frac{3}{4} + 2m_l m_s \right) \delta_{m_l m'_l} \delta_{m_s m'_s},$$

Le second terme de (1) quant à lui donne

$$\begin{aligned}\langle lm_l sm_s | L_+ S_- | lm'_l sm'_s \rangle &= \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l+1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s-1)} \langle lm_l sm_s | l, m'_l+1, s, m'_s-1 \rangle \\ &= \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l+1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s-1)} \delta_{m_l, m'_l+1} \delta_{m_s, m'_s-1}.\end{aligned}$$

De la même façon, on a pour le troisième terme

$$\begin{aligned}\langle lm_l sm_s | L_- S_+ | lm'_l sm'_s \rangle &= \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l-1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s+1)} \langle lm_l sm_s | l, m'_l-1, s, m'_s+1 \rangle \\ &= \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l-1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s+1)} \delta_{m_l, m'_l-1} \delta_{m_s, m'_s+1}.\end{aligned}$$

Ainsi, les éléments de la matrice de l'opérateur \mathbf{J}^2 dans la base des états $|lm_l\rangle \otimes |sm_s\rangle$ sont

$$\langle lm_l sm_s | \mathbf{J}^2 | lm'_l sm'_s \rangle = \left(l(l+1) + \frac{3}{4} + 2m_l m_s \right) \delta_{m_l m'_l} \delta_{m_s m'_s} + a'_{l+} \delta_{m_l, m'_l+1} \delta_{m_s, -1/2} + a'_{l-} \delta_{m_l, m'_l-1} \delta_{m_s, 1/2}$$

Pour représenter ces éléments de matrice, il nous faut définir une convention. Le plus simple est de les représenter sous la forme d'une matrice carrée de dimensions $2(2l+1)$ (m_s peut prendre deux valeurs et m_l peut prendre $2l+1$ valeurs car $-l \leq m_l \leq l$). Selon ma convention les valeurs de m_l grandissent quand on descend dans les lignes ou que l'on va vers la droite dans les colonnes. Selon ma convention toujours, je choisis également de répéter à chaque fois la valeur de m_l en l'associant une fois avec un spin $-1/2$ puis ensuite avec le spin $1/2$. Notez qu'il est très important d'étiqueter de la même façon les lignes et les colonnes.

$$\begin{array}{r} \begin{matrix} -l, -1/2 \\ -l, +1/2 \\ -l+1, -1/2 \\ -l+1, +1/2 \\ \vdots \\ \vdots \\ l, -1/2 \\ l, +1/2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} -l, -1/2 & -l, +1/2 & -l+1, -1/2 & -l+1, +1/2 & \cdots & \cdots & l, -1/2 & l, +1/2 \end{matrix} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{matrix} \end{pmatrix}\end{array}$$

On voit donc que l'on a défini notre matrice de façon à ce que les lignes et les colonnes croissent respectivement avec la valeur de m'_l et la valeur de m_l . En outre, pour chaque valeur de m'_l (resp. m_l), on a deux lignes (resp. deux colonnes) correspondant aux deux valeurs $-1/2$ et $+1/2$ de m'_s (resp. de m_s).

Cherchons maintenant à exprimer la matrice en mettant en évidence ses éléments non nuls :

- soit $m_l = m'_l$ et $m_s = m'_s$ et donc $\langle lm_l sm_s | \mathbf{J}^2 | lm'_l sm'_s \rangle = l(l+1) + 3/4 + 2m_l m_s$;
- soit $m_l = m'_l + 1$ et $m_s = m'_s - 1$
et donc $\langle lm_l sm_s | \mathbf{J}^2 | lm'_l sm'_s \rangle = \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l+1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s-1)}$;
- soit $m_l = m'_l - 1$ et $m_s = m'_s + 1$
et donc $\langle lm_l sm_s | \mathbf{J}^2 | lm'_l sm'_s \rangle = \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l-1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s+1)}$.

Clairement les seuls éléments non-nuls se trouveront sur la diagonale, la ligne en dessous et la ligne et dessus. De plus, l'état $|l, m'_l+1, s, m'_s-1\rangle$ n'existe que si $m'_s = 1/2$. En effet, si m'_s était égale à $-1/2$, on aurait $m_s = 3/2$ ce qui est impossible. De la même façon, $|l, m'_l-1, s, m'_s+1\rangle$

n'existe que si $m'_s = -1/2$. Cela rajoute donc des zéros. Au final, la matrice aura l'allure suivante (notez que les x ne font qu'indiquer l'emplacement d'une valeur non-nulle et ne valent pas tous la même chose).

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{cccccccc}
& -l, -1/2 & -l, +1/2 & -l+1, -1/2 & -l+1, +1/2 & \cdots & \cdots & l, -1/2 & l, +1/2 \\
-l, -1/2 & \begin{array}{c} X \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ X \\ X \\ 0 \\ \ddots \\ \ddots \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ X \\ X \\ 0 \\ \ddots \\ \ddots \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X \\ \ddots \\ \ddots \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X \\ \ddots \\ \ddots \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \ddots \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \ddots \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ X \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

On note que cette dernière est bloc-diagonale et que pour la diagonaliser, il suffit de diagonaliser bloc par bloc. Le premier bloc est le bloc 1×1 où $m_l = m'_l = -l$ et $m_s = m'_s = -1/2$. Sa valeur propre est $l^2 + 2l + 3/4$. Le deuxième bloc est

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{cc}
& -l, +1/2 & -l+1, -1/2 \\
-l, +1/2 & \begin{array}{c} l(l+1) + 3/4 + 2m_l m_s \\ \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l + 1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s + 1)} \end{array} & \begin{array}{c} \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l - 1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s + 1)} \\ l(l+1) + 3/4 + 2m_l m_s \end{array} \\
-l+1, -1/2 & \begin{array}{c} \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l + 1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s - 1)} \\ l(l+1) + 3/4 + 2m_l m_s \end{array} & \begin{array}{c} \sqrt{l(l+1) - m'_l(m'_l - 1)} \sqrt{3/4 - m'_s(m'_s + 1)} \\ l(l+1) + 3/4 + 2m_l m_s \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

ou encore

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{cc}
& -l, +1/2 & -l+1, -1/2 \\
-l, +1/2 & \begin{array}{c} l(l+1) + 3/4 - l \\ \sqrt{2l} \end{array} & \begin{array}{c} \sqrt{2l} \\ l(l+1) + 3/4 + l - 1 \end{array} \\
-l+1, -1/2 & \begin{array}{c} \sqrt{2l} \\ l(l+1) + 3/4 + l - 1 \end{array} & \begin{array}{c} \sqrt{2l} \\ l(l+1) + 3/4 + l - 1 \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

De façon plus générale, définissons

$$M = m_l + m_s$$

Ainsi, $m_l = M - m_s$ et on peut donc écrire n'importe quel bloc diagonal de la matrice de la façon suivante :

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{cc}
& m'_l = m_l, m'_s = 1/2 & m'_l = m_l + 1, m'_s = -1/2 \\
m_l, m_s = 1/2 & \begin{array}{c} l(l+1) + 3/4 + M - 1/2 \\ \sqrt{l(l+1) - M^2 + 1/4} \end{array} & \begin{array}{c} \sqrt{l(l+1) - M^2 + 1/4} \\ l(l+1) + 3/4 - M - 1/2 \end{array} \\
m_l + 1, m_s = -1/2 & \begin{array}{c} \sqrt{l(l+1) - M^2 + 1/4} \\ l(l+1) + 3/4 - M - 1/2 \end{array} & \begin{array}{c} \sqrt{l(l+1) - M^2 + 1/4} \\ l(l+1) + 3/4 - M - 1/2 \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Appelons cette matrice T . Pour trouver les valeurs propres de T il suffit de résoudre

$$\begin{aligned}
& \det(T - \lambda \mathbb{I}) = 0, \\
& \Leftrightarrow (l(l+1) + 1/4 - \lambda + M)(l(l+1) + 1/4 - \lambda - M) - l(l+1) + M^2 - 1/4 = 0 \\
& \Leftrightarrow (l(l+1) + 1/4 - \lambda)^2 - M^2 - l(l+1) + M^2 - 1/4 = 0 \\
& \Leftrightarrow (l(l+1) + 1/4 - \lambda)^2 = l(l+1) + 1/4 \\
& \Leftrightarrow (l(l+1) + 1/4 - \lambda) = \pm \sqrt{l(l+1) + 1/4} \\
& \Leftrightarrow \lambda = (l(l+1) + 1/4) \pm \sqrt{l(l+1) + 1/4} \\
& \Leftrightarrow \lambda = (l^2 + l + 1/4) \pm \sqrt{l^2 + l + 1/4} \\
& \Leftrightarrow \lambda = (l + 1/2)^2 \pm \sqrt{(l + 1/2)^2} \\
& \Leftrightarrow \lambda = (l + 1/2)^2 \pm (l + 1/2) \\
& \Leftrightarrow \lambda = (l + 1/2)(l + 1/2 \pm 1)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc

$$\lambda_- = (l + 1/2)(l - 1/2), \quad \lambda_+ = (l + 1/2)(l + 3/2). \quad (2)$$

et la matrice T diagonalisée peut donc s'écrire sous la forme

$$T_{diag.} = \begin{pmatrix} (l + 1/2)(l + 3/2) & 0 \\ 0 & (l + 1/2)(l - 1/2) \end{pmatrix}.$$

Il reste maintenant à calculer les états propres de J^2 . Ces derniers que l'on appelle $|JM\rangle$ sont en fait les états propres de l'ECOC $\{L^2, S^2, J^2, J_z\}$. Ils peuvent être calculés grâce à la formule suivante qui les lie aux états $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ par l'intermédiaire des coefficients de Clebsch-Gordan.

$$|JM\rangle = \sum_{m_l, m_s} \langle l, m_l, 1/2, m_s | JM \rangle |l, m_l, 1/2, m_s\rangle$$

Notez que dans cette formule, la somme

$$m_l + m_s = M$$

doit toujours être respectée. Cette formule peut se comprendre ainsi : Les vecteurs propres $|JM\rangle$ formant une nouvelle base, ils s'écrivent comme une combinaison linéaire des vecteurs de l'ancienne base, les $|l, m_l, 1/2, m_s\rangle$.

On peut aussi donner une autre interprétation à cette équation : Puisque les $|l, m_l, 1/2, m_s\rangle$ sont des vecteurs propres de L^2 et S^2 , n'importe quelle combinaison linéaire restera des également vecteur propre de ces deux opérateurs. Toutefois, ils ne sont pas vecteurs propres de J^2 . On cherche donc la combinaison linéaire correcte qui nous donne des nouveaux vecteurs propres également vecteurs propres de J^2 (et par la même occasion de J_z). Ainsi, on trouve un ensemble de vecteurs propres communs à tous les opérateurs de notre ECOC.

- (b) Cherchons maintenant la valeurs des coefficients de Clebsch-Gordon. Ces coefficients sont simples à calculer pour les valeurs limites de M , c'est-à-dire quand $M = \pm(l + 1/2)$ En effet,
- Si $M = -l - 1/2$ alors forcément $m_l = m'_l = -l$, $m_s = m'_s = -1/2$. Ainsi, il n'y a qu'une seule possibilité pour les valeurs de m_l ou m_s et donc la somme se réduit à un seul terme. Le coefficient unique de Clebsch-Gordon est donc forcément 1 (pour la normalisation);
 - De la même façon, si $M = l + 1/2 \Rightarrow m_l = m'_l = l$, $m_s = m'_s = 1/2$. À nouveau il ne reste qu'un terme dans la somme et le coefficient vaut 1.

Par ailleurs, comme les valeurs de M vont de $-J$ à J , pour ces cas là, J vaut forcément $l + 1/2$ On peut donc écrire le premier et le dernier vecteur propre $|JM\rangle$ comme la combinaison suivante des $|l, m_l, 1/2, m_s\rangle$

$$|l + 1/2, -l - 1/2\rangle = |l, -l, 1/2, -1/2\rangle$$

$$|l + 1/2, l + 1/2\rangle = |l, l, 1/2, 1/2\rangle$$

Pour les vecteurs propre suivantes, chaque sous-matrice 2×2 correspond à des états ayant le même M , mais pas le même J . Par convention, on a associé la première colonne à la valeur propre λ_+ . On se souvient que c'est la valeur propre de la matrice de J^2 et donc on sait qu'elle vaut $j(j + 1)$ (c'est la valeur propre de n'importe quel moment cinétique au carré). Pour obtenir λ_+ , il faut donc que $j = l + 1/2$ (et pour obtenir λ_- , il faut que $j = l - 1/2$). Ainsi, on associe la première colonne à $J = l + 1/2$ et la deuxième à $J = l - 1/2$.

D'après la formule données ci-dessus, on sait donc que chaque vecteur propre $|JM\rangle$ s'écrira comme une combinaison linéaire de deux états $|l, m_l, 1/2, 1/2\rangle$ et $|l, m_l + 1, 1/2, -1/2\rangle$. Pour connaître

la valeur des coefficients de Clebsch-Gordon, il reste donc à trouver les vecteurs propres de la matrices T. Pour cela, on résout

$$T \begin{pmatrix} a_{\pm} \\ b_{\pm} \end{pmatrix} = \lambda_{\pm} \begin{pmatrix} a_{\pm} \\ b_{\pm} \end{pmatrix}.$$

On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} (l(l+1) + 1/4 - M) a_{\pm} + \sqrt{l(l+1) + 1/4 - M^2} b_{\pm} &= \lambda_{\pm} a_{\pm}, \\ \sqrt{l(l+1) + 1/4 - M^2} a_{\pm} + (l(l+1) + 1/4 + M) b_{\pm} &= \lambda_{\pm} b_{\pm}. \end{aligned} \quad (3)$$

Résolvons la première équation pour λ_+ . Par convention, puisqu'il s'agit de la première colonne, ce sera donc l'état propre associé à $J = l + 1/2$.

$$\begin{aligned} (l(l+1) + 1/4 - M - (l^2 + 2l + 3/4)) a_+ + \sqrt{l(l+1) + 1/4 - M^2} b_+ &= 0, \\ \Leftrightarrow (-l - 1/2 - M) a_+ + \sqrt{(l + 1/2 + M)(l + 1/2 - M)} b_+ &= 0, \\ \Rightarrow b_+ &= a_+ \sqrt{\frac{(l + 1/2 + M)}{(l + 1/2 - M)}}. \end{aligned}$$

La condition de normalisation impose :

$$\begin{aligned} a_+^2 + b_+^2 &= 1, \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{(l + 1/2 + M)}{(l + 1/2 - M)}\right) a_+^2 &= 1, \end{aligned}$$

donc

$$a_+ = \pm \sqrt{\frac{l + 1/2 - M}{2l + 1}}. \quad (4)$$

et

$$b_+ = \pm \sqrt{\frac{l + 1/2 + M}{2l + 1}}, \quad (5)$$

On peut choisir le signe qu'on veut pour a_+ car cela ne fait que rajouter une phase globale, qui n'est pas mesurable. Il faut tout de même faire attention car le choix du signe de a_+ fixe le signe de b_+ . Ici, il faut prendre les deux mêmes signes pour a_+ et b_+ . Nous choisissons donc

$$a_+ = \sqrt{\frac{l + 1/2 + M}{2l + 1}}, \quad (6)$$

$$b_+ = \sqrt{\frac{l + 1/2 - M}{2l + 1}}. \quad (7)$$

a_+ est le coefficient de Clebsch-Gordon en avant de l'état $|l, m_l, 1/2, 1/2\rangle$ et b_+ est le coefficient de Clebsch-Gordon en avant de l'état $|l, m_l + 1, 1/2, -1/2\rangle$.

De la même façon, résolvons la première équation pour λ_- . Par convention, puisqu'il s'agit de la deuxième colonne, ce sera donc l'état propre associé à $J = l - 1/2$.

$$\begin{aligned}
(l(l+1) + 1/4 - M - (l^2 - 1/4)) a_- + \sqrt{(l+1/2+M)(l+1/2-M)} b_- &= 0, \\
\Leftrightarrow (l+1/2-M) a_- + \sqrt{(l+1/2+M)(l+1/2-M)} b_- &= 0, \\
\Leftrightarrow b_- &= -a_- \sqrt{\frac{(l+1/2-M)}{(l+1/2+M)}}.
\end{aligned}$$

La condition de normalisation impose :

$$\begin{aligned}
a_-^2 + b_-^2 &= 1, \\
\Leftrightarrow \left(1 + \frac{(l+1/2-M)}{(l+1/2+M)}\right) a_-^2 &= 1,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{a_- = \mp \sqrt{\frac{l+1/2+M}{2l+1}}}. \quad (8)$$

et

$$\boxed{b_- = \pm \sqrt{\frac{l+1/2-M}{2l+1}}}. \quad (9)$$

On peut choisir le signe qu'on veut pour a_- en faisant attention car le choix du signe de a_- fixe le signe de b_- . Ici, il faut prendre deux signes différents pour a_- et b_- . Nous choisissons donc :

$$a_- = \sqrt{\frac{l+1/2+M}{2l+1}}, \quad (10)$$

$$b_- = -\sqrt{\frac{l+1/2-M}{2l+1}}. \quad (11)$$

À nouveau, a_- est le coefficient de Clebsch-Gordon en avant de l'état $|l, m_l, 1/2, 1/2\rangle$ et b_- est le coefficient de Clebsch-Gordon en avant de l'état $|l, m_l + 1, 1/2, -1/2\rangle$.